Department of Industrial Engineering and Management

Technical Report

No. 2012-7

リスク評価にCVaRを用いた保険料決定の最適化モデル

柴崎 佑翔, 南條 慶輔, 高野 祐一, 水野 眞治

November, 2012

Tokyo Institute of Technology

2-12-1 Ookayama, Meguro-ku, Tokyo 152-8552, JAPAN
http://www.me.titech.ac.jp/index-e.html

リスク評価に CVaR を用いた保険料決定の最適化モデル

東京工業大学 大学院社会理工学研究科 経営工学専攻
柴崎 佑翔, 南條 慶輔, 高野 祐一, 水野 眞治

2012 年 11 月 8 日

1 はじめに

生命保険とは人間の疾病や死亡に関する保障であり, 万が一の保障として多くの人が加入している. この生命保険の保険料を適切な値に設定することは, 保険会社が健全な経営を続ける上で非常に重要である.

保険会社では, 加入者数を増やすためになるべく保険料を低く設定したいが, 低過ぎる保険料では多額の損失を被るリスクが生じる. このような背景から本論では, 死亡保障のみを対象とした生命保険の保険料最適化モデルを提案し, 損失リスクを抑えながらどの程度まで保険料を低く設定できるかを分析する.

事務費などを除いた保険料（純保険料）は, 死亡率と運用利回りが分かれば, 保険会社の収入現価と支出現価を等しくすること（収支相等の原則）により算出することができ (例えば文献 [2, 5, 10] などを参照), 性別と年齢ごとに保険料は計算される. しかし, 死亡率や運用利回りの値は現時点では不確実なので, 実測値が予測値 (期待値) より悪ければ保険会社は損失を被ることになる.

このようなリスクを回避するために, 死亡率や運用利回りを確率変数と見なして保険料を算出する方法が提案されている. 効用関数を用いた保険料の算出（例えば文献 [2, 6] などを参照）はその一つであるが, 効用関数は推定すること自体が難しく実用的とは言えない. そのため実務上は割増した死亡率を用いて, 収支相等の原則により保険料を算出することが一般的である. 例えば文献 [7] では, 死亡率の標準偏差に基づいて死亡率を割増する方法が示されているが, その割増額の妥当性が明確ではない上に, 保険会社の運用利回りの不確実性については考慮されていない.

より高度な手法として, 文献 [4] では死亡率と運用利回りを確率変数としたシミュレーションによって保険料を決定する手法が提案され, 文献 [3, 6] ではリスク分の付加保険料を決定するための様々な保険料計算原理が紹介されている. しかし, これらはすべて保険（性別と年齢）ごとにリスクを評価して保険料を決定するものであり, 保険全体の損失から生じるリスクを正確に把握した上で保険料を決定するものではない. また, 文献 [4] のようなシミュレーションを行えば, 設定した保険料に対して保険全体の損失から生じるリスクを計測することはある程度可能だと考えられるが, そこから性別と年齢ごとに適切な保険料を決定していくといったことは難しい.

本論では, 上述の既存手法の欠点を克服することを目的として, 最適化モデルを利用した保険料決定手法を提案する. 提案モデルでは, 想定する確率分布から多数のシナリオを生成することによって死亡率と運用利回りの不確実性を表現する. そして, ファイナンス分野のリスク指標 Conditional Value-at-Risk (CVaR) [9] によって損失リスクを定量化し, 損失リスク額の上限制約の下で適切な保険料を決定する. CVaR は一定の確率で生じる多額の損失を定量化するリスク指標であり, リスク指標として理論的に好ましい性質を備えていることが知られており [1, 8], 分位原理と呼ばれる保険料計算原理とも親和性が高い [3]. さらに提案モデルでは, 死亡率と運用利回りの両方の不確実性を考慮し, 保険全体の損失リスクを制御しながら, すべての性別, 年齢の保険料を同時に決定することが可能である.

本論では, 提案モデルを凸 2 次計画問題として定式化し, ある保険会社から提供された実際のデータを用いて数値実験を行った. 数値実験を通して, 死亡率と運用利回りの不確

実性が最適保険料に与える影響を調べ, 許容可能な損失リスク額の上限値と最適保険料の関係についても考察した. これらの分析は, 損失リスクを制御しながら死亡率と運用利回りの両方の不確実性を考慮して最適な保険料を決定する提案モデルだからこそ可能な分析であると言える. さらに, 既存の保険料計算手法との比較を通して, 提案モデルの特徴と有用性を明らかにした.

2　保険料の算出方法

本節では, まず今回想定する生命保険の前提を説明し, その生命保険の保険料の算出方法について述べる. その後, 保険料の算出方法の問題点について言及する.

2.1　設定

今回想定する死亡保障のみを対象とした生命保険は, 以下の前提に従うとする:

- ある一定の契約期間が存在する
- 契約期間内の毎年初めに契約者は保険料を支払う
- 支払う保険料は毎期一定金額
- 新規契約者, 継続契約者ともに保険料は同額
- 被保険者が死亡した場合のみ受取人に保険金が支払われる
- 保険金は即時払いとするが, モデル上は簡単のために各年度の中央で保険金が支払われることとして即時払いを近似する
- 途中解約は無いものとする

ここからは契約期間を T 年, 保険金額を M 円とし, これらは所与の値とする. そして, 文献 [2, 5] を一部参考にして以下のようにパラメータと決定変数を設定する:

- $\mathcal{X} := \{X_L, X_{L+1}, \cdots, X_{U-1}, X_U\}$: 年齢の集合
- $\mathcal{G} := \{$ 男性, 女性 $\}$: 性別の集合
- $\mathcal{B} := \{$ 新規, 継続 $\}$: 契約種別の集合
- $F_{x,g,b}$: 加入年齢 $x \in \mathcal{X}$ 歳, 性別 $g \in \mathcal{G}$, 契約種別 $b \in \mathcal{B}$ の保険の加入者数 (本論では加入者数は保険料に依存しないこととする)
- $P_{x,g}$: 加入年齢 $x \in \mathcal{X}$ 歳, 性別 $g \in \mathcal{G}$ の保険の年額保険料（決定変数）

死亡率と運用利回りについては不確実性を考慮するために, 以下のように多数のシナリオを想定する:

- $\mathcal{S} := \{1, 2, \cdots, S\}$: 想定する (死亡率と運用利回りの) シナリオの集合
- $p^{(s)}$: シナリオ $s \in \mathcal{S}$ の生起確率
- ${}_{t|}q^{(s)}_{x,g,b}$: シナリオ $s \in \mathcal{S}$ の下での, 現在 $x \in \mathcal{X}$ 歳, 性別 $g \in \mathcal{G}$, 契約種別 $b \in \mathcal{B}$ の加入者の t 年後〜$t+1$ 年後の間の危険率 (死亡率)
- $i^{(s)}_t$: シナリオ $s \in \mathcal{S}$ の下での, 現在から t 年目までの運用利回りの年率の平均

2.2　収支相等の原則

事務費などを除いた保険料 (純保険料) を算出する際には, 収支相等の原則が用いられる (例えば文献 [2, 5, 10] などを参照). 収支相等の原則では, 収入現価 (保険会社が保険契約者から集める保険料) と支出現価 (保険会社が保険受取人に支払う保険金) が等しくなるように保険料が決定される.

まず収入現価について説明する. 支払われる保険料 $P_{x,g}$ は毎期一定金額であり, 保険加入者の t 年目開始時点での生存率は $(1 - {}_{0|}q^{(s)}_{x,g,b} - {}_{1|}q^{(s)}_{x,g,b} - \cdots - {}_{t-2|}q^{(s)}_{x,g,b})$ である. よって, シナリオ s の下での, 加入者 1 人あたりからの t 年目の収入の現在価値は, 上記の生存率に割引された保険料 $\frac{P_{x,g}}{\left(1+i^{(s)}_{t-1}\right)^{t-1}}$ をかけて表すことができる. ゆえに, 契約期間 T 年の場合のシナリオ s の下での加入者 1 人あたりからの収入現価は各年度の収入現価の和として以下のように表される:

$$
\begin{aligned}
&P_{x,g} + \frac{(1 - {}_{0|}q^{(s)}_{x,g,b})P_{x,g}}{1 + i^{(s)}_1} \\
&+ \frac{(1 - {}_{0|}q^{(s)}_{x,g,b} - {}_{1|}q^{(s)}_{x,g,b})P_{x,g}}{\left(1 + i^{(s)}_2\right)^2} + \cdots \\
&+ \frac{(1 - {}_{0|}q^{(s)}_{x,g,b} - {}_{1|}q^{(s)}_{x,g,b} - \cdots - {}_{T-2|}q^{(s)}_{x,g,b})P_{x,g}}{\left(1 + i^{(s)}_{T-1}\right)^{T-1}}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

式 (1) は $P_{x,g}$ の線形関数であることを考慮すると $\bar{a}^{(s)}_{x,g,b}P_{x,g}$ と表すことができ, ここで $\bar{a}^{(s)}_{x,g,b}$ は加入者 1 人あたりからの保険料 1 円あたりの収入現価を表す定数とする.

支出現価も収入現価と同様に求める. 各年度の中央で保険金が支払われることを考慮し, シナリオ s の下での, 保険

加入者 1 人あたりへの t 年目の支出の現在価値は, t 年目での死亡率 ${}_{t-1|}q^{(s)}_{x,g,b}$ に割引された保険金額 $\frac{M}{(1+i^{(s)}_t)^{t-\frac{1}{2}}}$ をかけて表すことができる．よって, 契約期間 T 年の場合のシナリオ s の下での加入者 1 人あたりへの支出現価を表す定数 $\bar{c}^{(s)}_{x,g,b}$ は, 各年の支出現価の和として以下のように表される:

$$\begin{aligned}\bar{c}^{(s)}_{x,g,b} := & \frac{{}_{0|}q^{(s)}_{x,g,b}M}{(1+i^{(s)}_1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{{}_{1|}q^{(s)}_{x,g,b}M}{(1+i^{(s)}_2)^{\frac{3}{2}}} + \\ & \cdots + \frac{{}_{T-1|}q^{(s)}_{x,g,b}M}{(1+i^{(s)}_T)^{T-\frac{1}{2}}}.\end{aligned} \tag{2}$$

式 (1) と式 (2) から, 現在 x 歳, 性別 g の保険から得られる, シナリオ s の下での保険会社の利益は, 加入者 1 人あたりから得られる利益 $\bar{a}^{(s)}_{x,g,b}P_{x,g} - \bar{c}^{(s)}_{x,g,b}$ を保険加入者数 $F_{x,g,b}$ で重み付けして足し合わせることで, 保険料 $P_{x,g}$ の関数として

$$R^{(s)}_{x,g}(P_{x,g}) := \sum_{b\in\mathcal{B}} F_{x,g,b}\big(\bar{a}^{(s)}_{x,g,b}P_{x,g} - \bar{c}^{(s)}_{x,g,b}\big) \tag{3}$$

と表せる．また, 収支相等の原則に基づく保険料を $\bar{P}_{x,g}$ とすれば, $\bar{P}_{x,g}$ は性別と年齢ごとに期待利益が 0 になるよう以下の方程式を解くことで計算できる:

$$\sum_{s\in\mathcal{S}} p^{(s)} R^{(s)}_{x,g}(\bar{P}_{x,g}) = 0. \tag{4}$$

シナリオ s の下での保険全体から被る損失は以下のように表される:

$$L^{(s)}(\boldsymbol{P}) := \sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{g\in\mathcal{G}}\sum_{b\in\mathcal{B}} F_{x,g,b}\big(\bar{c}^{(s)}_{x,g,b} - \bar{a}^{(s)}_{x,g,b}P_{x,g}\big). \tag{5}$$

ここで, $\boldsymbol{P}$ は保険料 $P_{x,g}$, $x\in\mathcal{X}$, $g\in\mathcal{G}$ を要素に持つ行列とする．

2.3 保険料決定の既存割増手法

前節で, 収支相等の原則 (4) に基づく保険料の算出手法について述べたが, 死亡率の値が期待値を大きく上回れば保険会社は損失を被ってしまう．そのため, 実務上は期待値から割増した死亡率の値を用いることで, 損失を被るリスクを抑えた保険料を決定している．例えば, 文献 [7] では, 死亡率の期待値の 130% を上限として, 予測を超える確率が約 2.28% (2σ 水準) となるように死亡率を割増することが推奨されている．

つまり, 現在 x 歳, 性別 g, 契約種別 b の加入者の t 年後〜$t+1$ 年後の間の死亡率の期待値を ${}_{t|}\mu_{x,g,b}$, 標準偏差を ${}_{t|}\sigma_{x,g,b}$ としたとき, 割増された死亡率は

$${}_{t|}\bar{q}_{x,g,b} := {}_{t|}\mu_{x,g,b} + \min\{2{}_{t|}\sigma_{x,g,b},\, 0.3{}_{t|}\mu_{x,g,b}\} \tag{6}$$

となり, この割増された死亡率 ${}_{t|}\bar{q}_{x,g,b}$ を用いて収支相等の原則に従って保険料を計算する．しかし, 実際には死亡率に加えて運用利回りの値にも不確実性があり, この方法はそこから生じる損失のリスクを考慮していない．また, 他の性別と年齢の保険も合わせて保険全体として考えたときに, 式 (6) から計算される保険料はその妥当性が明確でない．

3 提案モデル

本節では, まず多額の損失を被るリスクを定量化する指標の 1 つである Conditional Value-at-Risk (CVaR) [9] の概要を説明する．次に, 本論で提案する保険料最適化モデルの定式化を示す．

また, モデル化に向けて以下のパラメータを設定する．

- β: CVaR の信頼水準（$\beta\in(0,1)$）
- η: CVaR の上限
- $\gamma_{x,g}$: 年齢 x 歳, 性別 g の保険から得られる期待利益の下限値（$\gamma_{x,g}\geq 0$）
- $\xi_{x,g}$: 年齢単調性パラメータ（$\xi_{x,g}\geq 1$）

3.1 Conditional Value-at-Risk

図 1 に示されているように, CVaR [9] は Value-at-Risk (VaR) を超える損失の期待値として定義される．CVaR はリスク指標として理論的に好ましい性質を備えており [1, 8], CVaR を用いた最適化問題は VaR と比較して扱いやすい [8, 9].

シナリオ s の下での損失の値を $L^{(s)}$ とするとき, 信頼水準 β の CVaR の値は以下の最適化問題の最適値として計算できる（例えば文献 [9] を参照）:

$$\left|\begin{array}{ll}\text{最小化} & y + \dfrac{1}{1-\beta}\displaystyle\sum_{s\in\mathcal{S}} p^{(s)} z^{(s)} \\ \text{制約条件} & z^{(s)} \geq L^{(s)} - y,\ z^{(s)} \geq 0,\ s\in\mathcal{S}.\end{array}\right. \tag{7}$$

ここで, y は VaR を表す決定変数であり, $z^{(s)}$ は CVaR を計算するための補助的な決定変数である．

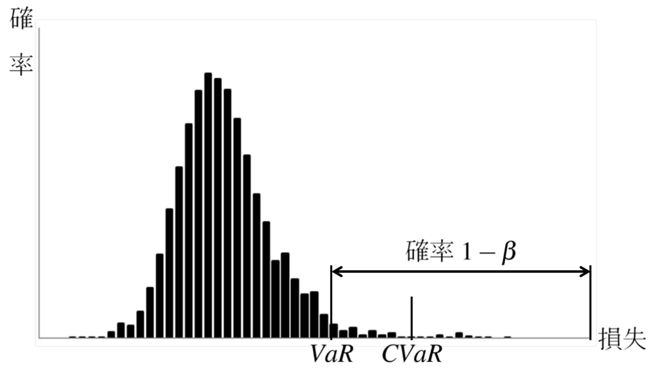

図 1　損失の確率分布と CVaR

3.2　定式化

1 節でも述べたように, 保険会社では, 加入者数を増やすためになるべく保険料を低く設定したいが, 収支相等の原則 (4) に基づく保険料 $\bar{P}_{x,g}$ は損失リスクを無視した保険料であり, $\bar{P}_{x,g}$ よりも保険料を下げることは現実的ではない. そこで, 本論では保険料 $\bar{P}_{x,g}$ を目標値として, 保険料 $\bar{P}_{x,g}$ からの保険料の乖離を最小化することを目的とする.

しかしながら, 保険料を低額にすれば保険会社が損失を被る可能性が生じる. 保険会社としては性別と年齢ごとの保険それぞれから被る損失よりも, 保険全体から被る損失を重点的に管理すべきだと考えられる. そこで, 本論では各保険から生じる損失を加入者数で重み付けして足し合わせた保険全体の損失 (5) によってリスク指標 CVaR を定義する. そしてその上限を η とし, 保険会社が多額の損失を被るリスクを制御する.

また, 極端に期待利益が小さい保険を無くすために, 年齢 x 歳, 性別 g の保険から得られる期待利益を $\gamma_{x,g}$ 以上とする. $\gamma_{x,g}=0$ の場合は収支相等の原則 (4) に基づく保険料 $\bar{P}_{x,g}$ より保険料を下げないという制約に対応する.

最後に, 高年齢の保険料を低年齢の保険料より低くすると, 加入を先延ばしにする動機や不公平感を与えてしまうことになり実務上好ましくない. このため, 加入年齢の増加に対して保険料が低くなることを防ぐ制約を課す.

以上の目的と制約条件を考慮し, 本論で提案する最適化モデルは以下の凸 2 次計画問題として定式化される:

変更割合モデル

$$
\left|\begin{array}{lll}
\text{最小化} & \displaystyle\sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{g\in\mathcal{G}}\left(\frac{P_{x,g}-\bar{P}_{x,g}}{\bar{P}_{x,g}}\right)^2 & \cdots(8,\mathrm{a}) \\
\text{制約条件} & \displaystyle y+\frac{1}{1-\beta}\sum_{s\in\mathcal{S}}p^{(s)}z^{(s)}\le\eta & \cdots(8,\mathrm{b}) \\
 & z^{(s)}\ge L^{(s)}(\boldsymbol{P})-y,\ z^{(s)}\ge 0, & \\
 & \quad s\in\mathcal{S} & \cdots(8,\mathrm{c}) \\
 & \displaystyle\sum_{s\in\mathcal{S}}p^{(s)}R^{(s)}_{x,g}(P_{x,g})\ge\gamma_{x,g}, & \\
 & \quad x\in\mathcal{X},\ g\in\mathcal{G} & \cdots(8,\mathrm{d}) \\
 & \xi_{x,g}P_{x,g}\le P_{x+1,g}, & \\
 & \quad x\in\mathcal{X}\setminus\{X_U\},\ g\in\mathcal{G}. & \cdots(8,\mathrm{e})
\end{array}\right. \qquad (8)
$$

ただし, 決定変数は $P_{x,g}$ (保険料), y, $z^{(s)}$ である.

ここでは, 加入者数の増減は保険料の変更割合に比例すると想定し, 目的関数 $(8,\mathrm{a})$ では, 保険料の変更割合の 2 乗, $(\frac{P_{x,g}-\bar{P}_{x,g}}{\bar{P}_{x,g}})^2$ の総和を最小化する.

式 $(8,\mathrm{b})$ は (制約式 $(8,\mathrm{c})$ の下で) リスク指標 CVaR の上限制約となっている. 式 $(8,\mathrm{d})$ は各保険の期待利益に対する下限制約, 式 $(8,\mathrm{e})$ は加入年齢の増加に対して保険料が低くなることを防ぐ制約である.

本論で提案する保険料決定モデルでは, 保険 (性別と年齢) ごとにリスクを評価して保険料を決定する先行研究 [3, 4, 6] や既存割増手法 (2.3 節) とは異なり, 保険全体から被る損失 (5) のリスクを CVaR によって制御し, すべての性別, 年齢の保険料を同時に最適化している.

本論では, 保険料の乖離を「保険料の変更割合の 2 乗」によって定義した変更割合モデル (8) を中心に数値実験の結果を示していくが, 保険料の乖離の定義は他にも考えることができる. 例えば以下のように保険料の乖離を「保険料の変更額の 2 乗」によって定義した最適化モデルを考えることもできる:

変更額モデル

$$
\left|\begin{array}{ll}
\text{最小化} & \displaystyle\sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{g\in\mathcal{G}}\left(P_{x,g}-\bar{P}_{x,g}\right)^2 \\
\text{制約条件} & (8,\mathrm{b}),(8,\mathrm{c}),(8,\mathrm{d}),(8,\mathrm{e}).
\end{array}\right. \qquad (9)
$$

4　数値実験

本節では, ある保険会社から提供された実際のデータを用いて, 以下の 3 点を目的とした数値実験を行う.

- 「死亡率の不確実性」と「運用利回りの不確実性」が変更割合モデル (8) の最適解に与える影響を調べる (4.2 節).
- CVaR の上限 (η) の変化が変更割合モデル (8) の最適解に与える影響を調べる (4.3 節).
- 本論で提案した変更割合モデル (8), 変更額モデル (9) と既存割増手法 (2.3 節) によって算出される保険料を比較する (4.4 節).

まず用いたデータについて説明し, 次に数値実験の結果を示す. 最適化モデルの求解には, MATLAB (R2012a) の Optimization Toolbox (quadprog) を使用した.

4.1 基本のパラメータ設定

- 対象年齢: 5 歳〜70 歳 ($X_L := 5,\ X_U := 70$)
- 保険の契約期間: 10 年 ($T := 10$)
- 保険金額: 1,000 万円 ($M := 10{,}000{,}000$)
- シナリオ数: 4,000 シナリオ ($S := 4{,}000$)
- 各シナリオの生起確率: 1/4,000 ($p^{(s)} := 1/4{,}000,\ s \in \mathcal{S}$)
- CVaR の信頼水準: 0.95 ($\beta := 0.95$)
- CVaR の上限: 0 円 ($\eta := 0$)
- 各保険から得られる期待利益の下限値: 0 円 ($\gamma_{x,g} := 0,\ x \in \mathcal{X},\ g \in \mathcal{G}$)
- 年齢単調性パラメータ: 1 ($\xi_{x,g} := 1,\ x \in \mathcal{X},\ g \in \mathcal{G}$)

継続契約は 5 歳にならないと加入できないことなどを考慮して, 本論では 5 歳以上の保険料を分析対象としている. 数値実験結果では, 年額保険料を一定の値で除して月額保険料に変換した値を示す.

保険加入者数: ある保険会社の生命保険の実績データを基にして, 保険加入者数 ($F_{x,g,b}$) を設定する.

死亡率: ある保険会社の 2001 年度〜2010 年度の実績データから, 各年齢・性別・契約種別の死亡率の平均ベクトル $\boldsymbol{\mu}$ と分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ を推定する. 各 $(s,t) \in \mathcal{S} \times \{0,1,\ldots,T-1\}$ に対応させて多変量正規分布 $\mathrm{N}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$ に従う乱数ベクトルを発生させて, そこで得られたシナリオ s, $x+t$ 歳, 性別 g, 契約種別 b の死亡率の値を死亡率 ${}_{t|}q_{x,g,b}^{(s)}$ とする.

表 1　不確実性に対する最適保険料の変化

年齢 (歳)		10	20	30	40	50	60	70
死亡率: 不確実	男性	211	471	613	1,477	4,001	10,898	23,780
利回り: 不確実	女性	94	188	335	782	1,810	4,285	10,694
死亡率: 不確実	男性	210	471	613	1,471	3,984	10,852	23,680
利回り: 定数	女性	94	188	334	779	1,802	4,267	10,649
死亡率: 定数	男性	211	471	610	1,455	3,852	10,035	21,882
利回り: 不確実	女性	94	188	334	777	1,779	4,133	10,320
死亡率: 定数	男性	207	462	605	1,438	3,809	9,902	21,572
利回り: 定数	女性	93	187	331	768	1,762	4,087	10,181

運用利回り: ある保険会社の 2001 年度〜2010 年度の実績データから, 運用利回りの平均 μ と標準偏差 σ を推定する. 各 $(s,t) \in \mathcal{S} \times \{1,2,\ldots,T\}$ に対応させて正規分布 $\mathrm{N}(\mu,\sigma)$ に従う乱数を発生させて $I_t^{(s)}$ とし, 運用利回りを $i_t^{(s)} := \left(\prod_{k=1}^{t}(1+I_k^{(s)})\right)^{1/t} - 1$ とする. なお, 運用利回りの平均 μ は約 0.0156 であり, 標準偏差 σ は約 0.0025 であった.

4.2 パラメータの不確実性と最適保険料

本論では, 死亡率と運用利回りを両方とも不確実なパラメータとして扱う保険料計算手法を提案した. そこで, この２つを不確実なパラメータとして扱った場合と, 期待値を用いて定数として扱った場合とを比較して, 変更割合モデル (8) が算出する最適保険料がどのように変化するかを表 1 に示す.

表 1 では, 性別・年齢に関わらず死亡率と利回りをともに不確実としたときに最も保険料が高くなっている. この結果から, パラメータを定数として扱うとパラメータの不確実性によるリスクを考慮しないために保険料が低くなるということが分かる. 特に, 表 1 の死亡率と利回りのどちらかを定数とした場合と, 両方を定数とした場合を比較すると, 利回りの不確実性よりも死亡率の不確実性の方が保険料に与える影響が大きいことが分かる. また, 50 歳〜70 歳のような高年齢では, パラメータの不確実性によって生じる保険料の差異が大きく, パラメータの不確実性を考慮することの必要性が示唆される.

表 2　CVaR の上限 (η) に対する最適保険料の変化

年齢 (歳)		10	20	30	40	50	60	70
η=0 円	男性	211	471	613	1,477	4,001	10,898	23,780
	女性	94	188	335	782	1,810	4,285	10,694
η=1 億円	男性	211	472	613	1,476	3,995	10,869	23,715
	女性	94	188	335	782	1,809	4,280	10,678
η=10 億円	男性	211	472	612	1,469	3,949	10,601	23,128
	女性	94	188	334	780	1,799	4,232	10,549
η=100 億円	男性	211	472	610	1,453	3,845	9,998	21,818
	女性	94	188	333	775	1,777	4,125	10,302

4.3　CVaR の上限と最適保険料

CVaR の上限 (η) は保険会社が許容できる損失額の大きさを表す．表 2 は, CVaR の上限 (η) の値の変化によって, 変更割合モデル (8) が算出する保険料がどのように変化するかを示している．CVaR の上限 (η) の値が大きければ保険会社が許容できる損失は大きく, 保険料をより低くすることができる．しかし, η を 0 円から 100 億円まで変化させても 30 歳以下の保険料は男女ともにほぼ変化が無い．これは, 死亡率が低く加入者数が比較的少ない低年齢の保険料よりも, より保険金支出の変動するリスクが大きい高年齢の保険料を変えることで損失を被るリスクを軽減しているためだと考えられる．また, η を 0 円から 100 億円まで大きく変化させているのに対し, 男性の 70 歳の保険料は 23,780 円から 21,818 円と変化額は小さい．同様に表 2 から全体として η の変化に対し, 保険料の変化は小さいことが分かる．これは, 今回のモデルでは η は男女 5 歳〜70 歳までの加入者の保険から被る損失の総和に対応する値であり, 多少の η の変化では損失の総和に対して規模が小さく, 保険料に与える影響が小さいためだと考えられる．

4.4　既存割増手法との比較

本節では既存割増手法 (2.3 節) と 2 種類の提案モデルの比較を行う．図 2〜5 は以下の手法で算出された男女 5 歳〜70 歳までの保険料をグラフにしたものである:

- 変更割合モデル: 最適化モデル (8)
- 変更額モデル: 最適化モデル (9)
- 既存割増モデル: 既存割増手法 (2.3 節)
- 収支相等: 収支相等の原則 (4) に基づく保険料 $\bar{P}_{x,g}$

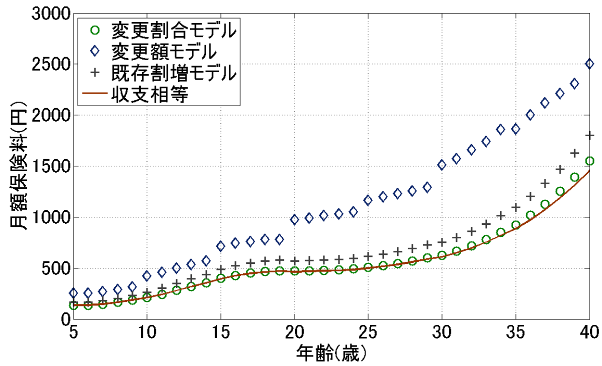

図 2　男性の保険料 (5 歳〜40 歳)

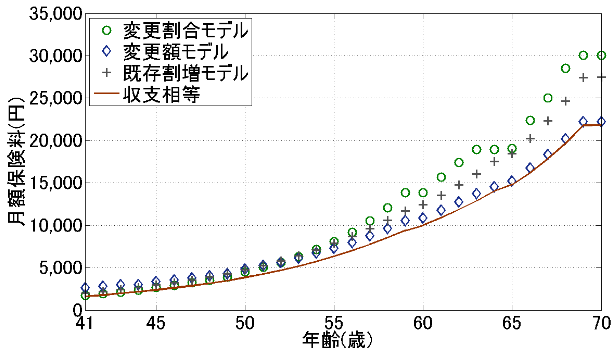

図 3　男性の保険料 (41 歳〜70 歳)

ただし, 変更割合モデル (8), 変更額モデル (9) の CVaR の上限 (η) は, 既存割増モデルによって算出した保険料からシナリオを用いて計算した CVaR の値 (約 −95.7 億円) と等しくした．この意味で, 変更割合モデル (8), 変更額モデル (9) は既存割増モデル以下の損失リスクの下で保険料を計算していると言える．

変更割合モデル (8) と既存割増モデルの保険料を比較すると, 図 3 の男性 54 歳〜70 歳では既存割増モデルよりも変更割合モデル (8) の保険料が高いが, それ以外の性別と年齢では変更割合モデル (8) は既存割増モデルとほぼ等しいか低い保険料を算出している．よって, 変更割合モデル (8) は被る損失のリスクを既存割増モデル以下にしながら, 既存割増モデルよりも多くの保険の保険料を低く設定できていると言える．一方で, 変更額モデル (9) と既存割増モデルの保険料を比較すると, 図 2, 3 の男性 50 歳以下と図 4, 5 の女性

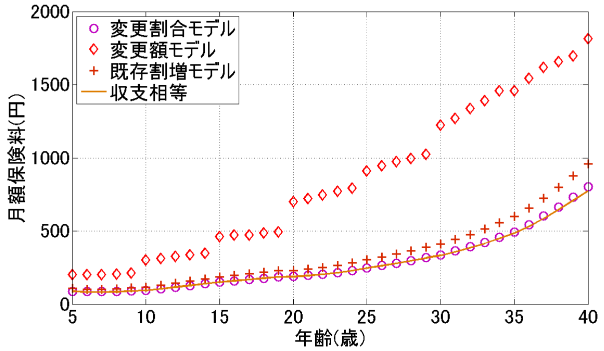

図 4　女性の保険料 (5 歳〜40 歳)

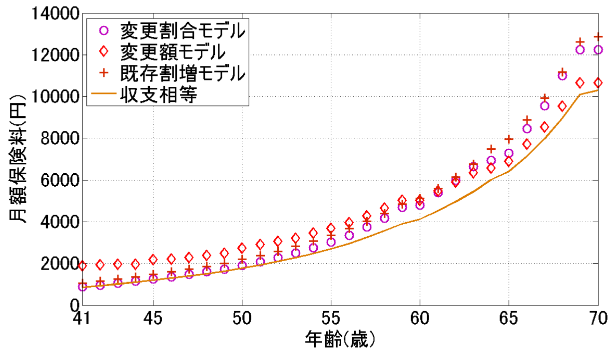

図 5　女性の保険料 (41 歳〜70 歳)

59 歳以下で変更額モデル (9) の方が保険料が高いことが分かる．例えば，図 2, 4 の 30 歳の保険料は男女ともに，変更額モデル (9) の保険料が既存割増モデルの 2 倍以上の値となっている．このような結果が得られる理由としては，変更額モデル (9) は各性別・年齢の保険料の変更額をある程度均等に最小化するため，低年齢の低い保険料に対してはその変更額の割合が高くなることが挙げられる．

2.3 節で説明したように，既存割増モデルでは各性別・年齢の保険料をそれぞれ 2σ 水準で割増している．その結果，保険全体の損失から計算した CVaR の値は上述のように約 -95.7 億円となり，これは 95% 以上の確率で保険会社が約 95.7 億円の利益を得ることを意味する．一方で，提案モデルでは，保険全体から被る損失 (5) をパラメータ η によって制御しながら，すべての性別・年齢の保険料を同時に最適化している．表 2 の変更割合モデル (8) の保険料と既存割増モデルの保険料（図 2〜5）を比較すれば，損失を被るリスクを回避しながら既存割増モデルよりも保険料を低く設定できる可能性があることは明らかである．これらの考察を踏まえると，なるべく保険料を低く設定することで加入者数を増やしたいと考える保険会社にとっては，本論で提案した保険料決定モデルは有用なリスク管理手法になりうると考える．

5　おわりに

本論文では，リスク指標 CVaR を利用し，死亡率と運用利回りの両方の不確実性を考慮して保険料を決定する最適化モデルを提案した．提案モデルは凸 2 次計画問題として定式化され，最適化ソルバーを用いれば比較的容易に解くことができる．また，全ての性別・年齢の保険から保険会社が被る損失の総和を制御しながら，全ての保険料を同時に決定できるという，既存研究には無い利点もある．

数値実験の結果から，パラメータの不確実性が保険料に与える影響を明らかにした．さらに，既存割増手法との比較を通して，提案モデルが算出する保険料の特徴を考察し，保険会社が損失を被るリスクを回避しつつ，既存割増手法よりも保険料を低く設定できる可能性があることを示した．

本論では保険加入者数は保険料に依存しないことを仮定した．この仮定が現実と異なるという可能性は否定できないが，保険料の変化に対する加入者数の増減を精度良く推定することは難しい．さらに，保険加入者数を保険料に依存するものとすると最適化モデルを解くことが難しくなってしまうため，この問題に対する効率的な解法を提案することは今後の課題となる．

参考文献

[1] P. Artzner, F. Delbaen, J.M. Eber, and D. Health: “Coherent Measures of Risk,” *Mathematical Finance*, **9** (1999), 203–228.
[2] H.U. ゲルバー (山岸義和 訳): 生命保険数学 (シュプリンガー・ジャパン, 2007).
[3] 浜野雅章, 森本祐司, 田口茂: 保険の国際会計基準と損害保険負債の時価評価, アクチュアリージャーナル, **48** (2003), 15–67.

[4] 金澤巌: 確率論的保険料算出方法に関する一考察, 日本アクチュアリー会会報, **55** (2002), 73–90.

[5] 黒田耕嗣: 生命年金数理 I 理論編 (培風館, 2003).

[6] 森本祐司: 金融と保険の融合について , 金融研究, **19** (2000), 289–342.

[7] 日本アクチュアリー会: 標準生命表 2007 の作成概要, http://www.actuaries.jp/lib/standard-life-table/seimeihyo2007_B3.pdf.

[8] G.Ch. Pflug: "Some Remarks on the Value-at-Risk and the Conditional Value-at-Risk," In S. Uryasev (Ed.): *Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications* (Kluwer, 2000).

[9] R.T. Rockafellar and S. Uryasev: "Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions," *Journal of Banking & Finance*, **26** (2002), 1443–1471.

[10] 山内恒人: 生命保険数学の基礎—アクチュアリー数学入門— (東京大学出版会, 2009).