Department of Industrial Engineering and Management

Technical Report

No. 2011-8

単体法の計算量の新評価

北原 知就，水野 眞治

August, 2011

Tokyo Institute of Technology

2-12-1 Ookayama, Meguro-ku, Tokyo 152-8552, JAPAN
http://www.me.titech.ac.jp/index-e.html

単体法の計算量の新評価
New Evaluation of Computational Amount of the Simplex Method

北原　知就，　水野　眞治
Tomonari KITAHARA and Shinji MIZUNO

東京工業大学大学院社会理工学研究科
〒152-8552 目黒区大岡山 2-12-1
Graduate School of Decision Science and Technology
Tokyo Institute of Technology
2-12-1 Oo-Okayama Meguro-ku, Tokyo 152-8552, Japan

kitahara.t.ab@m.titech.ac.jp，mizuno.s.ab@m.titech.ac.jp

概要

単体法は，線形計画問題を解く最も基本的な解法であり，多くの大規模な現実問題を実際に効率よく解くことができる．しかし，理論的には，計算量 (あるいは反復回数) が入力データの多項式でおさえられる解法であるか分かっていない．さらに，いくつかのピボッティング規則には，Klee-Minty の問題のように，入力データの指数の大きさの反復回数を必要とする例題がある．Klee-Minty の問題では，変数の数と制約式の数は大きくないが，制約条件式の係数と定数，目的関数の係数などに非常に大きな値が使われている．その結果として，目的関数あるいは実行可能基底解の要素が大きな値をとり，単体法が多くの基底解を生成していると考えられる．しかし，大規模な現実問題では，制約条件式の係数と定数，目的関数の係数などにあまり大きな値は一般にあらわれず，目的関数値あるいは実行可能基底解の値もそれほど大きくならない場合が多い．本論の目的は，このような問題に対して，単体法で生成される解の最大個数を評価し，それが大きくならないことを示すことである．

Keywords: 線形計画問題，単体法，実行可能基底解，双対問題，解の数

1　Introduction

単体法は，線形計画問題を解く最も基本的な解法であり，多くの大規模な現実問題を実際に効率よく解くことができる．しかし，理論的には，楕円体法あるいは内点法のように計算量 (あるいは反復回数) が入力データの多項式でおさえられる解法であるか，分かっていない．さらに，いくつかのピボッティング規則には，入力データの指数の大きさの反復を必要とする例題が知られている．特によく知られた例題として，Klee-Minty [9] の線形計画問題がある．この例題があるため，単体法の計算量，反復回数，あるいは生成される解の数に関する研究はあまり活発に行われてこなかった．

Klee-Minty の線形計画問題では，変数の数 n と制約式の数 m は大きくないが，制約条件式の係数と定数，目的関数の係数などに m の指数の大きさの値が使われている．その結果と

して，目的関数あるいは実行可能基底解の要素が大きな値をとり，単体法が多くの基底解を生成していると考えられる．しかし，大規模な現実問題では，制約条件式の係数と定数，目的関数の係数などにあまり大きな値は一般にあらわれず，目的関数値あるいは実行可能基底解の値もそれほど大きくならない場合が多い．本論の目的は，このような問題に対して，単体法で生成される解の最大個数を評価し，それが大きくならないことを示すことである．

単体法の計算量あるいは反復回数を測る上で，退化と巡回について理解しておく必要がある．単体法は，線形計画問題が退化していると，同じ解で複数の基底を何度も生成する巡回を起こし，無限に繰り返す可能性がある．したがって，一般に，問題に非退化の仮定をしなければ，反復回数を見積もることができない．本論では，線形計画問題に非退化の仮定をしない．その代り，単体法の反復回数ではなく，単体法によって生成される異なった解の数について調べる．問題が退化していなければ，反復回数と生成される異なった解の数が等しいが，一般には反復回数の方が大きくなる．また，生成される解の数は，基底の数以下であるので，必ず有限である．

本論では，ピボットに Dantzig の規則（最小係数規則）を使った単体法を主に扱う．そして，与えられた標準形の線形計画問題を初期の実行可能基底解から単体法で解くとき，生成される異なった（実行可能基底）解の数の上界を得る．その上界が

$$(n-m)\left\lceil \min\{m, n-m\}\frac{\gamma}{\delta}\log\left(\min\{m, n-m\}\frac{\gamma}{\delta}\right)\right\rceil$$

あるいは，より単純に

$$n\left\lceil m\frac{\gamma}{\delta}\log\left(m\frac{\gamma}{\delta}\right)\right\rceil$$

となることを示す．ここで，m は等式制約の数，n は変数の数，δ と γ はそれぞれすべての実行可能基底解のすべての正の要素の最小値と最大値を表わし，実数 $a \in \Re$ に対して $\lceil a \rceil$ は a より大きい最小の整数を表わす．もし，線形計画問題が非退化ならば，これは反復回数の上界にもなる．また，この上界は，線形計画問題の制約条件のみに依存し，目的関数とは無関係である．この結果より，現実の大規模な問題において，比 γ/δ があまり大きくならなければ，単体法の反復回数もそれほど大きくはならない．

標準形の線形計画問題だけでなく，双対問題あるいは変数の上限制約をもつ線形計画問題に対しても，同様に上界を得ることができることを示す．また，得られた結果を，$0-1$ 頂点からなる線形計画問題，ネットワーク計画問題，完全ユニモジュラ (Totally unimodular) 行列の線形計画問題，マルコフ決定問題 (Markov Decision Problem) などに適用することにより，これらの問題を単体法で解くときに，生成される解が多くならないことを示す．

上記に示した上界が実際問題にどれほどタイトであるか疑問を抱くかもしれない．この上界は，δ と γ の比 γ/δ に大きく依存している．ここでは，Klee-Minty の単純な変種を構築することにより，実際に生成される解の数が γ/δ に一致する例があることを示す．したがって，生成される解の数の上界として γ/δ よりよいものを得ることができないことがわかる．この意味で，比 γ/δ が大きいとき，上記の上界は，かなりタイトなものであるといえる．

2　単体法について

ここでは，単体法について復習を兼ねて簡単にまとめる．次の標準形の線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \min & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}, \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{1}$$

を扱う．ここで，m と n を正の整数とするとき，$\boldsymbol{A} \in \Re^{m\times n}$，$\boldsymbol{b} \in \Re^m$，$\boldsymbol{c} \in \Re^n$ はデータであり，$\boldsymbol{x} \in \Re^n$ は変数ベクトルである．上の問題 (1) を主問題とするとき，その双対問題は

$$\begin{array}{ll} \max & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}, \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{s} = \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{2}$$

となる．ここで，$\boldsymbol{y} \in \Re^m$ は変数ベクトル，$\boldsymbol{s} \in \Re^n$ はスラック変数からなるベクトルである．これらの問題に対して，本論を通して，次の仮定を置く．

仮定 1　*(i)* 行列 $\boldsymbol{A}$ のランクは m である．

(ii) 主問題 *(1)* は最適解をもつ．このとき，双対定理より双対問題 *(2)* も最適解をもつ．

(iii) 主問題の初期の実行可能基底解 $\boldsymbol{x}^0$ が既知である．

主問題 (1) の最適基底解を $\boldsymbol{x}^*$，双対問題 (2) の最適基底解を $(\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{s}^*)$ とし，主問題の最適値を z^* とする．双対定理より，双対問題の最適値も z^* となる．

添え字の部分集合 $B \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ とその補集合 $N = \{1, 2, \ldots, n\} - B$ に対して，係数行列 $\boldsymbol{A}$，目的関数の係数ベクトル $\boldsymbol{c}$，変数ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{s}$ を

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_B, \boldsymbol{A}_N),\ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_B \\ \boldsymbol{c}_N \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{pmatrix},\ \boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{s}_B \\ \boldsymbol{s}_N \end{pmatrix}$$

と分解して表現することにする．$\boldsymbol{A}_B$ が正則な正方行列となるとき，B を基底と呼ぶ． 基底の集合を

$$\mathcal{B} = \{B \subset \{1, 2, \ldots, n\} \mid |B| = m,\ \det(\boldsymbol{A}_B) \neq 0\}$$

とする． 任意の基底 B と非基底 $N = \{1, 2, \ldots, n\} - B$ に対して，主問題 (1) は，

$$\begin{array}{ll} \min & \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}_N^T\boldsymbol{x}_N, \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}_B\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{A}_N\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

と表わされ，さらに $\boldsymbol{A}_B$ が逆行列をもつので

$$\begin{array}{ll} \min & \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{A}_N^T(\boldsymbol{A}_B^{-1})^T\boldsymbol{c}_B)^T\boldsymbol{x}_N, \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_N\boldsymbol{x}_N, \\ & \boldsymbol{x}_B \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x}_N \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{3}$$

と書き換えることができる．これを，基底 B に対する線形計画問題 (1) の辞書という．この辞書より，基底解

$$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{0}$$

が得られる．もし，$\boldsymbol{x}_B \geq \boldsymbol{0}$ ならば，これは実行可能基底解となる．

同様に，双対問題 (2) は，

$$\begin{array}{ll} \max & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}, \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}_B^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{s}_B = \boldsymbol{c}_B, \\ & \boldsymbol{A}_N^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{s}_N = \boldsymbol{c}_N, \\ & \boldsymbol{s}_B \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{s}_N \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

と表わされ，さらに

$$\begin{array}{ll} \max & \boldsymbol{b}^T(\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B - \boldsymbol{b}^T(\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{s}_B, \\ \text{subject to} & \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B - (\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{s}_B, \\ & \boldsymbol{s}_N = (\boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{A}_N^T(\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B) + \boldsymbol{A}_N^T(\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{s}_B, \\ & \boldsymbol{s}_B \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{s}_N \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{4}$$

と書き換えることができる．これを，基底 B に対する双対問題 (2) の辞書という．この辞書より，基底解

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B,\ \boldsymbol{s}_B = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{s}_N = \boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{A}_N^T(\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B$$

が得られる．もし，$\boldsymbol{s}_N \geq \boldsymbol{0}$ ならば，これは実行可能基底解となる．主問題 (3) と双対問題 (4) を比べると，それぞれの基底解における目的関数値が等しく，主問題の基底解が双対問題の目的関数の係数となっており，逆に双対問題の基底解が主問題の目的関数の係数となっていることが分かる．

主問題 (3) のすべての実行可能基底解のすべての正の要素の最小値を δ，最大値を γ とする．このとき，任意の実行可能基底解 $\hat{\boldsymbol{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_n)^T$ と任意の添え字 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して，

$$\delta \leq \hat{x}_j \leq \gamma \text{ if } \hat{x}_j \neq 0 \tag{5}$$

が成立する．ここで，δ と γ の値は，実行可能領域を定める $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{b}$ に依存して決まり，目的関数の係数ベクトル $\boldsymbol{c}$ には無関係である．

単体法により，初期実行可能基底解 $\boldsymbol{x}^0$ より実行可能基底解の列 $\{\boldsymbol{x}^t | t = 1, 2, \cdots\}$ と基底の列 $\{B^t | t = 1, 2, \cdots\}$ を生成したとする．t 番目の基底 B^t に対して，$N^t = \{1, 2, \ldots, n\} - B^t$ を非基底とし，$\bar{\boldsymbol{c}}_{N^t} = \boldsymbol{c}_{N^t} - \boldsymbol{A}_{N^t}^T(\boldsymbol{A}_{B^t}^{-1})^T\boldsymbol{c}_{B^t}$ とすれば，辞書 (3) は

$$\begin{array}{ll} \min & \boldsymbol{c}_{B^t}^T\boldsymbol{A}_{B^t}^{-1}\boldsymbol{b} + \bar{\boldsymbol{c}}_{N^t}^T\boldsymbol{x}_{N^t}, \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x}_{B^t} = \boldsymbol{A}_{B^t}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}_{B^t}^{-1}\boldsymbol{A}_{N^t}\boldsymbol{x}_{N^t}, \\ & \boldsymbol{x}_{B^t} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x}_{N^t} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{6}$$

と表わされる．非基底変数 $\boldsymbol{x}_{N^t}$ の係数ベクトル $\bar{\boldsymbol{c}}_{N^t}$ は縮約コストベクトルと呼ばれる．もし，$\bar{\boldsymbol{c}}_{N^t} \geq \boldsymbol{0}$ が成立するならば，現在の基底解 $\boldsymbol{x}^t$ は最適解となる．さもなければ，単体法では，基底に新しく入る変数と出る変数を定めてピボット演算を行うことにより，新しい基底解を得る．新しく基底に入る変数を定めるのに，いくつかの規則があり，たとえば，最小係数規則 (Dantzig の規則），最良改善規則，最小添え字規則などがある．Dantzig の規則を使う場合には，縮約コストベクトル $\bar{\boldsymbol{c}}_{N^t}$ の要素で最小となる添え字，すなわち

$$j^t = \arg\min_{j \in N_t} \bar{c}_j.$$

表 1: 記号の説明

$\boldsymbol{x}^*$	:	主問題 (1) の最適基底解
$(\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{s}^*)$	:	双対問題 (2) の最適基底解
z^*	:	主問題 (1) と双対問題 (2) の最適値
B^t	:	単体法で生成される t 番目の基底
N^t	:	非基底 $\{1, 2, \cdots, n\} - B^t$
$\boldsymbol{x}^t$	:	基底 B^t に対する基底解
$\bar{\boldsymbol{c}}_{N^t}$	:	$\boldsymbol{x}^t$ での縮約コストベクトル
Δ^t	:	縮約コストの最小値の絶対値 $-\min_{j \in N_t} \bar{c}_j$
j^t	:	$\boldsymbol{x}^t$ において，Dantzig の規則で選ばれる基底に入る変数の添え字

に対する変数 x_{j^t} を選ぶ．このときの縮約コストの絶対値を

$$\Delta^t = -\bar{c}_{j^t}$$

とする．最良改善規則では，次の基底解で目的関数値が最小となるように基底に入る変数を選ぶ．主単体法では，基底に入る変数がきまったら，問題 (1) の実行可能基底解が得られるように，基底から出る変数を定める．

本節で定義し，次の節以降でも使用する記号を表 1 にまとめておく．

3　単体法によって生成される解の数の上界

本節の内容は，Ye [10], Kitahara and Mizuno [5], Kitahara, Matsui, and Mizuno [4] を参考にしている．ここで述べられている定理，補題等の証明は，それらの文献などに掲載されている．

まずはじめに，任意の最適でない実行可能基底解 $\boldsymbol{x}^t$ において，線形計画問題 (1) の最適値の下界と縮約コストベクトル $\bar{\boldsymbol{c}}_{N^t}$ の最小値の絶対値 Δ^t の下界が得られることを示す．

補題 1 線形計画問題 *(1)* の最適値を z^* とし，最適でない任意の実行可能基底解を $\boldsymbol{x}^t$ とし，辞書における縮約コストベクトル $\bar{\boldsymbol{c}}_{N^t}$ の最小値の絶対値 $-\min_{j \in N_t} \bar{c}_j$ を Δ^t とすれば，不等式

$$z^* \geq \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^t - \min\{n - m, m\} \Delta^t \gamma$$

と

$$\Delta^t \geq \frac{\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^t - z^*}{\min\{n - m, m\} \gamma}$$

が成り立つ．

ここでは，図を使って補題 1 の説明をする．辞書 (6) から基底変数 $\boldsymbol{x}_{B^t}$ を消去すると，

$$\begin{array}{ll} \min & \boldsymbol{c}_{B^t}^T \boldsymbol{A}_{B^t}^{-1} \boldsymbol{b} + \bar{\boldsymbol{c}}_{N^t}^T \boldsymbol{x}_{N^t}, \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}_{B^t}^{-1} \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}_{B^t}^{-1} \boldsymbol{A}_{N^t} \boldsymbol{x}_{N^t} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x}_{N^t} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

が得られる．ここで，ベクトル $\bar{\boldsymbol{c}}_{N^t}^T$ には負の要素が必ず存在するので，非基底変数 $\boldsymbol{x}_{N^t}$ の空間で，上の辞書の実行可能領域とベクトル $\bar{\boldsymbol{c}}_{N^t}^T$ を表示すると，図 1 のようになる．この図では，原点 $(\boldsymbol{x}_{N^t} = \boldsymbol{0})$ が基底解 $\boldsymbol{x}^t$ を表わしている．ここで，ベクトル $\bar{\boldsymbol{c}}_{N^t}^T$ の成分で負となる最も小さな成分の座標を x_{N_2} とすれば，図 1 より実行可能領域が領域

$$\{\boldsymbol{x}_{N^t} | \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^t + \bar{\boldsymbol{c}}_{N^t}^T \boldsymbol{x}_{N^t} \geq \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^t - (n-m)\gamma\Delta^t\}$$

に含まれることがわかる．したがって，最適解もこの領域に含まれるので，不等式

$$z^* \geq \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^t - (n-m)\gamma\Delta^t$$

が成立する．また，任意の基底解で正となる要素の数が高々 m であることを使うと，上の式における $(n-m)$ を $\min\{m, n-m\}$ に置き換えることができる．このことから，補題の結果が得られる．

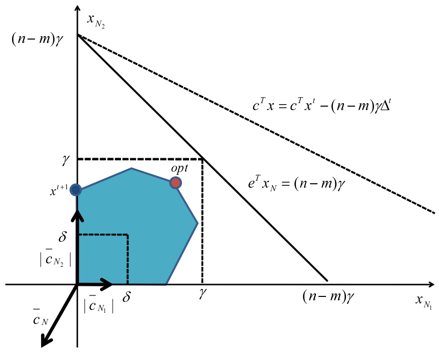

図 1: 補題 1 の説明

補題 1 の証明： 線形計画問題 (1) の最適解を $\boldsymbol{x}^*$ とすれば，

$$\begin{aligned} z^* &= \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^* \\ &= \boldsymbol{c}_{B^t}^T \boldsymbol{A}_{B^t}^{-1} \boldsymbol{b} + \bar{\boldsymbol{c}}_{N^t}^T \boldsymbol{x}_{N^t}^* \\ &\geq \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^t - \Delta^t \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{x}_{N^t}^* \\ &\geq \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^t - \min\{n-m, m\}\Delta^t\gamma \end{aligned}$$

が成立する．ここで，最後の不等式は，集合 N^t の要素の数が $n-m$ であること，最適基底解 $\boldsymbol{x}^*$ の正の要素の数が多くとも m であることと，式 (5) から導かれる．これより，補題の結果が簡単に得られる． ■

つぎに，Dantzig の規則を使った単体法で基底解が更新される場合には，目的関数値と最適値の差（ギャップ）がある一定の割合で減少することを示す．また，その減少率は，目的関数の係数 $\boldsymbol{c}$ に無関係である．

定理 1 *Dantzig* の規則を使った単体法で生成される t 番目の基底解と $(t+1)$ 番目の基底解をそれぞれ $\boldsymbol{x}^t$ と $\boldsymbol{x}^{t+1}$ とする．もし，$\boldsymbol{x}^{t+1} \neq \boldsymbol{x}^t$ であるならば，不等式

$$\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^{t+1} - z^* \leq \left(1 - \frac{\delta}{\min\{n-m, m\}\gamma}\right) (\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^t - z^*) \tag{7}$$

が成立する．

証明：実行可能基底解 $\boldsymbol{x}^t$ において単体法で選ばれ，基底に入る変数を x_{j^t} とする．もし，更新された点で $x_{j^t}^{t+1}=0$ であるならば，$\boldsymbol{x}^{t+1}=\boldsymbol{x}^t$ となるので，仮定に反する．したがって，$x_{j^t}^{t+1}\neq 0$ であり，式 (5) より $x_{j^t}^{t+1}\geq\delta$ となる．このとき，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^t-\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^{t+1} &= \Delta^t x_{j^t}^{t+1}\\ &\geq \Delta^t\delta\\ &\geq \tfrac{\delta}{\min\{m,n-m\}\gamma}(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^t-z^*)\end{aligned}$$

となる．ここで，最後の不等式は，補題 1 から導かれる．上の不等式より，定理の結果を得ることができる．■

上の定理より，単体法で生成される異なる解の数の上界が次のように得られる．

系 1 線形計画問題の *2* 番目に目的関数値が小さい，すなわち最適解を除いて目的関数値が最も小さい実行可能基底解を $\bar{\boldsymbol{x}}$ とする．初期の実行可能基底解 $\boldsymbol{x}^0$ から，*Dantzig* の規則を使った単体法により基底解の列を生成するとき，生成される異なった解の数は，高々

$$\left\lceil\min\{m,n-m\}\frac{\gamma}{\delta}\log\left(\frac{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^0-z^*}{\boldsymbol{c}^T\bar{\boldsymbol{x}}-z^*}\right)\right\rceil \tag{8}$$

である．ここで，実数 a に対して，$\lceil a\rceil$ は a より大きい最小の整数を表している．

証明：単体法で生成される t 番目の実行可能基底解を $\boldsymbol{x}^t$ とし，そこまでに生成される異なった解の数を $\tilde{t}$ とする．このとき，不等式 (7) より

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^t-z^*\leq\left(1-\frac{\delta}{\min\{m,n-m\}\gamma}\right)^{\tilde{t}}(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^0-z^*)$$

が成立する．もし，$\tilde{t}$ が式 (8) の値以上ならば，上の不等式より，簡単な計算により

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^t-z^*<\boldsymbol{c}^T\bar{\boldsymbol{x}}-z^*$$

が得られる．$\bar{\boldsymbol{x}}$ の定義より，実行可能基底解 $\boldsymbol{x}^t$ は，線形計画問題 (1) の最適解である．■

上の系で得られる上界 (8) は，目的関数に依存している．初期解での目的関数のギャップと 2 番目に小さい基底解での目的関数のギャップの比が小さい場合には，これがよい上界となる．しかし，制約式には大きな係数がないが，目的関数値に大きな係数があるような問題では，この上界が大きな値となってしまう可能性がある．そこで，以下の議論では，目的関数に依存しない上界を得る．次の補題では，最適解でない実行可能基底解において，基底変数の中に最適値とのギャップに比例した上界をもつ変数が存在することを示す．

補題 2 主問題の最適解ではない任意の実行可能基底解を $\boldsymbol{x}^t$ とし，その基底を B^t とする．このとき，ある基底変数 $x_{\bar{j}}$ $(\bar{j}\in B^t)$ が存在し，$x_{\bar{j}}^t>0$，$s_{\bar{j}}^*>0$，かつ任意の実行可能解 $\boldsymbol{x}^k$ において

$$x_{\bar{j}}^k\leq\min\{m,n-m\}\frac{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k-z^*}{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^t-z^*}x_{\bar{j}}^t$$

が成立する．

図を使って補題 2 の説明をする．最適基底解の辞書から基底変数 $\boldsymbol{x}_{B^*}$ を消去すると，

$$\begin{array}{ll} \min & \boldsymbol{c}_{B^*}^T \boldsymbol{A}_{B^*}^{-1} \boldsymbol{b} + \bar{\boldsymbol{c}}_{N^*}^T \boldsymbol{x}_{N^*}, \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}_{B^*}^{-1} \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}_{B^*}^{-1} \boldsymbol{A}_{N^*} \boldsymbol{x}_{N^*} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x}_{N^*} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

が得られる．最適解では，ベクトル $\bar{\boldsymbol{c}}_{N^*}^T$ の要素がすべて非負なので，非基底変数 $\boldsymbol{x}_{N^*}$ の空間で，上の辞書の実行可能領域とベクトル $\bar{\boldsymbol{c}}_{N^*}^T$ を表示すると，図 2 のようになる．この図では，原点 $(\boldsymbol{x}_{N^*} = \boldsymbol{0})$ が最適基底解となっており，$\boldsymbol{x}^t$ はどこかの頂点と一致している．ここで，ベクトル $\bar{\boldsymbol{c}}_{N^*}^T$ の成分で最も大きな正の成分の座標を x_{N_1} とすれば，図 2 より目的関数値が現在の基底解 $\boldsymbol{x}^t$ 以下となる領域（図中の三角形領域）は，変数 x_{N_1} の値が $(n-m)x_{N_1}^t$ 以下となる領域に含まれる，すなわち

$$\{\boldsymbol{x}_{N^*} | \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^t\} = \{\boldsymbol{x}_{N^*} | \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} - z^* \leq \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^t - z^*\} \subset \{\boldsymbol{x}_{N^*} | x_{N_1} \leq (n-m) x_{N_1}^t\}$$

となる．ここで，原点（最適解）において $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} - z^*$ と x_{N_1} が共に 0 となるので，上式の後の二つの集合内の不等式の右辺をどちらも同じ定数 $\frac{\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^k - z^*}{\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^t - z^*}$ で乗じても包含関係が成り立ち

$$\{\boldsymbol{x}_{N^*} | \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} - z^* \leq \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^k - z^*\} \subset \{\boldsymbol{x}_{N^*} | x_{N_1} \leq (n-m) \frac{\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^k - z^*}{\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^t - z^*} x_{N_1}^t\}$$

が得られる．また，任意の基底解で正となる要素の数が高々 m であることを使うと，上の式における $(n-m)$ を $\min\{m, n-m\}$ に置き換えることができる．このことから，変数 x_{N_1} を補題中の変数 $x_{\bar{j}}$ とすれば，補題の結果が得られる．

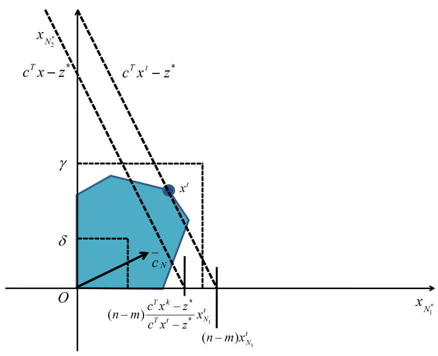

図 2: 補題 2 の説明

補題 2 の証明： 双対問題 (2) の最適基底解を $(\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{s}^*)$ とすれば，簡単な計算により

$$\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^t - z^* = (\boldsymbol{x}^t)^T \boldsymbol{s}^* = \sum_{j \in B^t} x_j^t s_j^*$$

が成立する．集合 B^t の要素数は m であり，ベクトル $\boldsymbol{s}^*$ の正の要素は高々 $(n-m)$ であるので，上の不等式より，ある $\bar{j} \in B^t$ に対して

$$\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^t - z^* \leq \min\{m, n-m\} s_{\bar{j}}^* x_{\bar{j}}^t$$

が成立する．これより，$x^t_{\bar{j}} > 0$，$s^*_{\bar{j}} > 0$ であり，さらに

$$s^*_{\bar{j}} \geq \frac{1}{\min\{m, n-m\} x^t_{\bar{j}}} (\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^t - z^*)$$

となる．また，任意の実行可能解 $\boldsymbol{x}$ において

$$\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} - z^* = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s}^* = \sum_{j=1}^{n} x_j s^*_j \geq x_{\bar{j}} s^*_{\bar{j}}$$

が成立する．したがって，上の二つの不等式から

$$x_{\bar{j}} \leq \frac{\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} - z^*}{s^*_{\bar{j}}} \leq \min\{m, n-m\} \frac{\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} - z^*}{\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^t - z^*} x^t_{\bar{j}}$$

が得られる． ■

上の補題により，最適解でない基底解では，基底変数の中に最適値とのギャップに比例した上界をもつ変数が存在する．そのような変数は，ギャップが十分小さい実行可能基底解では値が δ より小さくなる，すなわち 0 となるので，定理 1 の結果と組み合わせることにより，次の結果を得ることができる．

補題 3 *Dantzig* の規則を使った単体法で生成される t 番目の実行可能基底解を $\boldsymbol{x}^t$，そのときの基底を B^t とする．これが最適解でないならば，ある $\bar{j} \in B^t$ に対して，$x^t_{\bar{j}} > 0$ かつ $s^*_{\bar{j}} > 0$ となり，さらに単体法により，この基底解から

$$\left\lceil \min\{m, n-m\} \frac{\gamma}{\delta} \log \left(\min\{m, n-m\} \frac{\gamma}{\delta} \right) \right\rceil$$

以上の異なった解が生成されたとすれば，変数 $x_{\bar{j}}$ の値はゼロとなり，その後もゼロのままである．

図を使って補題 3 の説明をする．補題 2 より，変数 $x_{\bar{j}}$ は目的関数値のギャップ $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} - z^*$ に比例した上界をもち，定理 1 より，その上界は基底解が更新されるごとに，ある一定比率で小さくなる．したがって，その上界を図 3 の点線で表わすことができる．単体法で点列を生成すると，変数 $x_{\bar{j}}$ の値は，図のようにゼロになったり正の値をとったりを繰り返す可能性があるが，上記の上界が δ より小さくなれば，その後は正の値をとることができなくなり，常に 0 となることが分かる．この上界が δ 以下となるまでの解の更新数を求めると，補題の結果が得られる．

補題 3 の証明： $k \geq t+1$ に対して，基底解 $\boldsymbol{x}^t$ から $\boldsymbol{x}^k$ までに単体法で生成される異なった解の数を $\tilde{k}$ とする．このとき，定理 1 と補題 2 から，ある $\bar{j} \in B_t$ が存在し，$x^t_{\bar{j}} > 0$ かつ

$$\begin{aligned} x^k_{\bar{j}} &\leq \min\{m, n-m\} \left(1 - \tfrac{\delta}{\min\{m, n-m\}\gamma}\right)^{\tilde{k}} x^t_{\bar{j}} \\ &\leq \min\{m, n-m\} \gamma \left(1 - \tfrac{\delta}{\min\{m, n-m\}\gamma}\right)^{\tilde{k}} \end{aligned}$$

となる．ここで，2 番目の不等式は，式 (5) から導かれている．これより，もし

$$\tilde{k} > \min\{m, n-m\} \frac{\gamma}{\delta} \log \left(\min\{m, n-m\} \frac{\gamma}{\delta} \right)$$

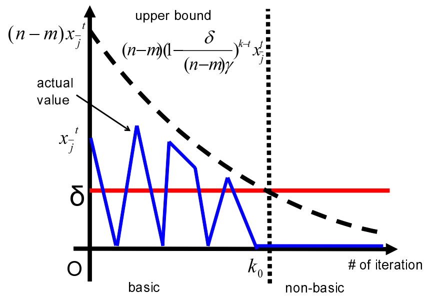

図 3: 補題 3 の説明

が成立するならば，$x_{\bar{j}}^k < \delta$ となる．したがって，δ の定義より，$x_{\bar{j}}^k = 0$ となる．上の不等式は，$\boldsymbol{x}^k$ 以降に生成されるすべての基底解において成り立つので，補題の結果が得られる．■

上の補題で述べたイベントは，各変数 x_i $(i \in \{1, 2, \cdots, n\})$ について高々1 回のみ起こり，候補となる変数は双対問題の最適基底解 $(\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{s}^*)$ で s_i^* が正となる i に対する x_i のみである．そのような変数は高々$(n-m)$ であるので，次の定理が得られる．

定理 2 初期点 $\boldsymbol{x}^0$ から *Dantzig* の規則を使った単体法で主問題 *(1)* の基底解の列を生成するとき，異なった解の数は多くとも

$$(n-m)\left\lceil \min\{m, n-m\}\frac{\gamma}{\delta}\log\left(\min\{m, n-m\}\frac{\gamma}{\delta}\right)\right\rceil$$

である．

この定理の結果は，単体法により最適解が得られる場合のみでなく，巡回に陥る場合にも成り立つ．もし主問題 (1) が非退化ならば，単体法で生成される解はすべて異なるので，次の系が得られる．

系 2 もし主問題 *(1)* が非退化ならば，任意の初期実行可能基底解から，*Dantzig* の規則を使った単体法により

$$(n-m)\left\lceil \min\{m, n-m\}\frac{\gamma}{\delta}\log\left(\min\{m, n-m\}\frac{\gamma}{\delta}\right)\right\rceil$$

以下の反復で最適解を得ることができる．

4 他の線形計画問題への拡張

この節では，前節で得た標準形の線形計画問題に対する結果を，その双対問題あるいは変数に上限制約がついた問題に拡張する．

4.1 双対標準形

主問題 (1) に対する双対単体法，すなわち，双対問題 (2) の実行可能基底解を生成する単体法については，次のような結果を得ることができる．

定理 3 *(Kitahara and Mizuno [7])* 主問題 *(1)* を *Dantzig* の規則（最大係数規則）を使った双対単体法により解くとき，生成される異なる解の数は，高々

$$m\left\lceil \min\{m,n-m\}\frac{\gamma_D}{\delta_D}\log\left(\min\{m,n-m\}\frac{\gamma_D}{\delta_D}\right)\right\rceil$$

となる．ここで，δ_D と γ_D は，それぞれ双対問題 *(2)* のすべての実行可能基底解 $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{s})$ におけるベクトル $\boldsymbol{s}$ のすべての正の要素の最小値と最大値を表わす．

ここで，δ_D と γ_D の値は，双対問題の基底解におけるベクトル $\boldsymbol{s}$ の要素の値によって決まり，ベクトル $\boldsymbol{y}$ の値とは，無関係であることを注意する．すなわち，不等式表現のみで表わされた多面体 $\{\boldsymbol{y}|\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}\le\boldsymbol{c}\}$ を実行可能領域とする線形計画問題では，δ_D と γ_D の値は，その多面体の頂点の座標ではなく，スラック変数の値によって決まる．このことは，不等式表現のみで表わされた多面体を実行可能領域とする線形計画問題では，多面体を平行移動すると頂点の座標が変化するが，単体法で生成される基底解の数が変化しないことにも矛盾しない．

4.2　変数に上限制約のついた線形計画問題

ネットワーク最適化などに現れる線形計画問題には，各変数に上限制約がつくことがよくある．ここでは，各変数に上限制約のついた次の線形計画問題

$$\begin{array}{ll}\min & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x},\\ \text{subjectto} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{0}\le\boldsymbol{x}\le\boldsymbol{u}\end{array}\tag{9}$$

を扱う．ここで，$\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)^T\in\Re^n$ の各要素 u_i は，各変数 x_i の上限を表わしている．この問題には，次の結果が得られている．

定理 4 *(Kitahara, Matsui, and Mizuno [4])* 上限制約のついた線形計画問題 *(9)* を *Dantzig* の規則を使った単体法で解くとき，生成される異なる解の数は，高々

$$(n-m)\left\lceil (n-m)\frac{\gamma}{\delta}\log\left((n-m)\frac{\gamma}{\delta}\right)\right\rceil$$

である．ここでは，$\gamma\le\max_i u_i$ となる．

5　特殊な線形計画問題への適用

この節では，前節までに得られた結果を使うことにより，特殊な線形計画問題を単体法で解くときに必要な反復回数，あるいは生成される解の数があまり多くならないことを示す．取り上げる問題には，$0-1$ 基底解からなる線形計画問題，最短路問題，最小費用流問題，最大流問題，完全ユニモジュラ (Totally unimodular) 行列の線形計画問題，マルコフ決定問題 (Markov Decision Problem) がある．

5.1　$0-1$ 基底解

ここでは，割り当て問題のように，すべての基底解のすべての要素が 0 または 1，すなわち $\delta=\gamma=1$ であるような線形計画問題 (1) を扱う．このとき，$\gamma/\delta=1$ であるから，次の結果が得られる．

定理 5 すべての基底解のすべての要素が 0 または 1 であるような線形計画問題 *(1)* を *Dantzig* の規則を使った単体法で解くとき，生成される異なる解の数は，高々

$$(n-m)\left\lceil \min\{m,n-m\}\log\min\{m,n-m\}\right\rceil$$

である．

5.2　最短路問題

頂点の集合を V，枝の集合を E とするグラフ $G=(V,E)$ 上で，ある頂点 $v\in V$(source node) から，すべての頂点への最短路を求める問題を線形計画問題として定式化すると

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij}, \\ \text{subjectto} & \sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} x_{ij} = \begin{cases} |V|-1 & \text{for } i=v \\ -1 & \text{for } i\in V \text{ and } i\neq v \end{cases} \\ & x_{ij}\geq 0 \text{ for each } (i,j)\in E \end{array} \tag{10}$$

となる．ここで，c_{ij} は枝 $(i,j)\in E$ の長さ，x_{ij} は枝 $(i,j)\in E$ を k 個の頂点への最短路に使うとき k，どの頂点へも使わないとき 0 となる変数を表わす．最短路問題では，上の線形計画問題 (10) が非退化となることが知られている．また，変数の数 $n=|E|$，等式制約の数 $m=|V|$ であり，すべての基底解のすべての要素が整数であり，最大値が $|V|-1$ 以下，すなわち，$\delta=1$ かつ $\gamma\leq|V|-1$ となる．したがって，次の結果が得られる．

定理 6 最短路問題 *(10)* を *Dantzig* の規則を使った単体法で解くとき，高々

$$(|E|-|V|)\left\lceil \min\{|V|,|E|-|V|\}|V|\log\min\{|V|,|E|-|V|\}|V|\right\rceil,$$

あるいはもっと単純に $2|E||V|^2\log|V|$ の反復で最適解を得ることができる．

5.3　最小費用流問題

頂点の集合を V，枝の集合を E とするグラフ $G=(V,E)$ 上の最小費用流問題は，線形計画問題として

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij}, \\ \text{subjectto} & \sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} x_{ij} = b_i \text{ for each } i\in V \\ & 0\leq x_{ij}\leq u_{ij} \text{ for each } (i,j)\in E \end{array} \tag{11}$$

と表わされる．ここで，c_{ij} は枝 $(i,j)\in E$ に 1 単位流すときの費用，b_i は頂点 $i\in V$ の供給量または需要量，x_{ij} は枝 $(i,j)\in E$ 上の流量，u_{ij} は枝 $(i,j)\in E$ 上の流れの上限を表わす．ここでは，すべての u_{ij} $((i,j)\in E)$ と b_i $(i\in V)$ が整数であるとする．このとき，$n=|E|$，$m=|V|$，$\delta=1$，$\gamma\leq u_{max}=\max_{(i,j)\in E}u_{ij}$ となるので，定理 4 より次の結果が得られる．

定理 7 最小費用流問題をあらわす上の線形計画問題 *(11)* を *Dantzig* の規則を使った単体法で解くとき，生成される異なる解の数は，高々

$$(|E|-|V|)\lceil (|E|-|V|)u_{max}\log((|E|-|V|)u_{max})\rceil$$

である．

最小費用流問題 (11) は，一般に退化している．しかし，例えば Ahuja, Magnanti, and Orlin [1] に示されているように，問題 (11) において，ある 1 つの頂点 i の供給量 b_i に $-(|V|-1)/|V|$ を加え，その他の頂点 i の需要量 b_i に $1/|V|$ を加えると，得られる摂動した線形計画問題が非退化となり，さらにその問題を解くことにより，元の問題 (11) の最適解を得ることができる．したがって，摂動した線形計画問題を Dantzig の規則を使った単体法で解くことにより，高々

$$(|E|-|V|)\lceil (|E|-|V|)|V|u_{max}\log((|E|-|V|)|V|u_{max})\rceil$$

回の反復で最小費用流問題 (11) の最適解を得ることができる．

5.4 最大流問題

頂点の集合を V，枝の集合を E とするグラフ $G=(V,E)$ 上で，始点 $s\in V$ から終点 $t\in V$ $(t\neq s)$ への流れ f の最大値を求める問題は，線形計画問題として

$$\begin{array}{ll} \max & f \\ \text{subject to} & \sum_{\{j:(s,j)\in E\}} x_{sj} - \sum_{\{j:(j,s)\in E\}} x_{js} = f \\ & \sum_{\{j:(i,j)\in E\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(j,i)\in E\}} x_{ji} = 0 \quad \text{for } i\in V \text{ but } i\neq s,t \\ & \sum_{\{j:(t,j)\in E\}} x_{tj} - \sum_{\{j:(j,t)\in E\}} x_{jt} = -f \\ & 0\le x_{ij}\le u_{ij} \text{ for each}(i,j)\in E \end{array} \tag{12}$$

と表わすことができる．ここで，x_{ij} は枝 $(i,j)\in E$ 上の流量，u_{ij} は枝 $(i,j)\in E$ 上の流れの上限を表わす．すべての上限 u_{ij} が整数であるとし，$u_{max}=\max_{(i,j)\in E} u_{ij}$ とする．この線形計画問題は，双対単体法で効率よく解くことができる．その双対問題は，最小カット問題となり，すべての基底解のすべての要素が 0 または 1 となる．したがって，変数の数 $n=|E|+1$，等式制約の数 $m=|V|$，$\gamma_D/\delta_D=1$ であるので，定理 3 と 4 より次の結果が得られる．

定理 8 最大流問題をあらわす上の線形計画問題 *(12)* を *Dantzig* の規則を使った双対単体法で解くとき，生成される異なる解の数は，高々

$$(|E|+|V|+1)\lceil (|E|-|V|+1)\log(|E|-|V|+1)\rceil$$

である．

5.5 完全ユニモジュラ行列の線形計画問題

ここでは，主問題 (1) の係数行列 $\boldsymbol{A}$ が完全ユニモジュラ (Totally Unimodular) であり，定数ベクトル $\boldsymbol{b}$ の各要素が整数である場合について考察する．行列 $\boldsymbol{A}$ は，すべての正方な部

分小行列の行列式が 1，0，-1 のいずれかであるとき，完全ユニモジュラであるといわれる．このとき，すべての基底解の要素が整数となるので，正の要素の最小値 $\delta = 1$ となる．主問題 (1) の基底を B とし，基底解を $(\boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{0}) \in \Re^m \times \Re^{n-m}$ とすれば，$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}$ となる．完全ユニモジュラ行列の逆行列の任意の成分は，1，0，-1 のいずれかであるので，$\boldsymbol{x}_B$ の各要素の値は高々 $\|b\|_1$ であり，基底解の正の要素の最大値 γ は $\|b\|_1$ 以下となる．以上の議論と定理 2 から，次の結果が得られる．

系 3 主問題 *(1)* の係数行列 $\boldsymbol{A}$ が完全ユニモジュラであり，定数ベクトル $\boldsymbol{b}$ の各要素が整数であるとする．任意の初期実行可能基底解から *Dantzig* の規則を使った単体法を使うとき，生成される異なる解の数は，高々

$$(n-m)\left\lceil \min\{m, n-m\}\|b\|_1 \log(\min\{m, n-m\}\|b\|_1) \right\rceil$$

である．

5.6 マルコフ決定問題

可能な行動が 2 つである場合のマルコフ決定問題は，線形計画問題として

$$\begin{array}{ll} \min & \boldsymbol{c}_1^T\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{c}_2^T\boldsymbol{x}_2, \\ \text{subject to} & (\boldsymbol{I} - \theta\boldsymbol{P}_1)\boldsymbol{x}_1 + (\boldsymbol{I} - \theta\boldsymbol{P}_2)\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{e}, \\ & \boldsymbol{x}_1 \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x}_2 \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{13}$$

と表わすことができる．ここで，$\boldsymbol{I}$ は $m \times m$ 単位行列，$\boldsymbol{P}_1$ と $\boldsymbol{P}_2$ は $m \times m$ マルコフ行列，θ は割引率，$\boldsymbol{e}$ はすべての要素が 1 のベクトルを表わす．マルコフ決定問題は，次のような特徴を持つ．

1. 非退化である．

2. すべての実行可能基底解のすべての正の要素の最小値は 1 以上，すなわち，$\delta \geq 1$ である．

3. すべての実行可能基底解のすべての正の要素は高々 $\frac{m}{1-\theta}$，すなわち，$\gamma \leq \frac{m}{1-\theta}$ である．

これらの特徴と $n = 2m$ を使うと，次の定理の結果を得ることができる．

系 4 マルコフ決定問題 *(13)* を *Dantzig* の規則を使ったを単体法で解くとき，反復回数は高々

$$m\left\lceil \frac{m^2}{1-\theta} \log \frac{m^2}{1-\theta} \right\rceil$$

である．

6　単体法で生成される解の最大個数の下界

この節の内容は，Kitahara and Mizuno [6, 8] の内容を参考としている．ここで述べられている定理，補題等の証明は，それらの文献などに掲載されている．

変数の数が n 以下，等式制約の数が m 以下，任意の実行可能基底解の任意の正の成分が δ 以上 γ 以下であるような任意の線形計画問題 (1) と任意の初期実行可能基底解に対して，Dantzig の規則を使った単体法を適用するとき，生成される異なる実行可能基底解の最大個数を $M(m,n,\delta,\gamma)$ とする．このとき，定理 2 より，$M(m,n,\delta,\gamma)$ の上界が

$$M(m,n,\delta,\gamma) \le (n-m)\left\lceil \min\{m,n-m\}\frac{\gamma}{\delta}\log(\min\{m,n-m\}\frac{\gamma}{\delta})\right\rceil$$

と得られる．ここでは，$M(m,n,\delta,\gamma)$ のなるべく大きな下界を得る．

Dantzig and Thapa による線形計画問題の本 [3] などには，Klee-Minty の線形計画問題として

$$\begin{array}{ll}\max & \sum_{i=1}^{m} 10^{m-i}x_i,\\ \text{subject to} & x_1 \le 1,\\ & 2\sum_{i=1}^{k-1} 10^{k-i}x_i + x_k \le 100^{k-1} \quad \text{for } k=2,3,\cdots,m,\\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}\end{array}$$

が示されている．ここで，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^T$ は変数ベクトルである．この問題を Dantzig の規則を使った単体法で解くとき，最大 (2^m-1) の異なる基底解が生成されることが知られている．この問題では，等式制約の定数項のみでなく，目的関数の係数あるいは等式制約の係数にも指数的に大きな値が使われている．その結果，実行可能基底解の成分が非常に大きな値，あるいは非常に小さな正の値をとり，比 γ/δ は 100^m 以上の莫大な値となる．この場合，比 γ/δ は単体法で生成される異なる解の最大個数 (2^m-1) よりもかなり大きな値となる．

Kitahara and Mizuno [6] は，Klee-Minty の線形計画問題の単純な変種を構築し，その問題で生成される異なる基底解の数が比 γ/δ と等しくなることを示した．その問題は，

$$\begin{array}{ll}\max & \sum_{i=1}^{m} x_i,\\ \text{subject to} & x_1 \le 1,\\ & 2\sum_{i=1}^{k-1} x_i + x_k \le 2^k-1 \quad \text{for } k=2,3,\cdots,m,\\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}\end{array}$$

と表わされる．この問題では，目的関数の任意の係数あるいは等式制約の任意の係数がとても単純な値 (0，1，2) となっている．上の問題にスラック変数のベクトル $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_m)^T$ を導入すると，標準形の線形計画問題

$$\begin{array}{ll}\max & \sum_{i=1}^{m} x_i,\\ \text{subject to} & x_1 + y_1 = 1,\\ & 2\sum_{i=1}^{k-1} x_i + x_k + y_k = 2^k-1 \quad \text{for } k=2,3,\cdots,m,\\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}\end{array} \tag{14}$$

が得られる．この問題の等式制約の数は m であり， 変数の数は $n=2m$ である．

補題 4 *(Kitahara and Mizuno [8])* 問題 *(14)* は次のような性質を持つ．

1. 任意の実行可能基底解において，任意の $k \in \{1, 2, \cdots, m\}$ に対して，変数 x_k と y_k のどちらか一方のみが基底変数となる．

2. 実行可能基底解の数は 2^m である．

3. 任意の実行可能基底解の各成分は整数である．

4. 非退化である．

5. 最適解は
$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^* &= (0, 0, \cdots, 0, 2^m - 1)^T,\\ \boldsymbol{y}^* &= (1, 2^2 - 1, \cdots, 2^{m-1} - 1, 0)^T\end{aligned}$$
であり，その最適値は $(2^m - 1)$ である．

6. すべての実行可能解のすべての正の成分の最小値が 1 であり，最大値が $(2^m - 1)$ である．すなわち，
$$\delta = 1,\ \gamma = 2^m - 1$$
である．

問題 (14) の初期実行可能基底解を $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{y} = (1, 2^2 - 1, \cdots, 2^m - 1)^T$ とし，次の Dantzig の規則を使った単体法により基底解を更新するとする：

- 辞書において縮約コストが最大（最大化問題であるので）となる非基底変数を基底に入れる変数に選ぶ．
- 2 つ以上の非基底変数の縮約コストが同時に最大となるときは，その中で x_i または y_i の添え字 i が最も小さなものを選ぶ．

まず，$m = 1$ の場合について単体法を説明する．初期解が $x_1 = 0$，$y_1 = 1$ であるので，初期の辞書は
$$\begin{array}{rcll} z &=& & x_1,\\ y_1 &=& 1 & -x_1 \end{array}$$
となる．ここで，z は目的関数を表わしている．このとき単体法では，基底に入る非基底変数として x_1 を選び，更新した辞書
$$\begin{array}{rcll} z &=& 1 & -y_1,\\ x_1 &=& 1 & -y_1 \end{array}$$
を計算する．この辞書は最適であり，最適解 $x_1 = 1$，$y_1 = 0$ と最適値 1 を得ることができる．

つぎに，$m = 2$ の場合について単体法を説明する．初期解が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{y} = (1, 3)^T$ であるので，初期の辞書は
$$\begin{array}{rclll} z &=& & x_1 & +x_2,\\ y_1 &=& 1 & -x_1, & \\ y_2 &=& 3 & -2x_1 & -x_2 \end{array} \tag{15}$$

となる．ここから，単体法では，次のように辞書を更新する：辞書 (15) から基底に入る非基底変数として，縮約コストが最大で添え字の最も小さい x_1 を選び，2 番目の辞書

$$\begin{array}{rclll} z &=& 1 & -y_1 & +x_2, \\ x_1 &=& 1 & -y_1, & \\ y_2 &=& 1 & +2y_1 & -x_2 \end{array}$$

を得る．3 番目の辞書は

$$\begin{array}{rclll} z &=& 2 & +y_1 & -y_2, \\ x_1 &=& 1 & -y_1, & \\ x_2 &=& 1 & +2y_1 & -y_2 \end{array}$$

となり，4 番目の辞書は

$$\begin{array}{rclll} z &=& 3 & -x_1 & -y_2, \\ y_1 &=& 1 & -x_1, & \\ x_2 &=& 3 & -2x_1 & -y_2 \end{array}$$

となる．この辞書は最適であり，最適解 $(x_1, x_2) = (0, 3)$，$(y_1, y_2) = (1, 0)$ とそのときの最適値 $(2^2 - 1) = 3$ を得る．以上のことから，次のことが観測できる．

- 反復回数は $(2^2 - 1)$ である．
- 任意の辞書における任意の縮約コスト係数の値は，1 または -1 である．
- 目的関数値は，各反復で 1 増える．

これと同様な結果を任意の m に対して得ることができる．

定理 9 *(Kitahara and Mizuno [6, 8])* 問題 *(14)* を初期実行可能基底解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{y} = (1, 2^2 - 1, \cdots, 2^m - 1)^T$ から *Dantzig* の規則を使った単体法を使って解くとき，次のことが成り立つ．

- 反復回数は $(2^m - 1)$ である．
- 任意の辞書における任意の縮約コスト係数の値は，1 または -1 である．
- 目的関数値は，各反復でちょうど 1 ずつ増える．

上の定理 9 より，問題 (14) には，任意の整数 $k \in [0, 2^m - 1]$ に対して目的関数値が k となる実行可能基底解が存在し，単体法により，それらの基底解が目的関数の小さい順にすべて生成されることが分かる．また，上の定理より，次の結果も得られる．

定理 10 $n = 2m$，$\delta = 1$，$\gamma = 2^m - 1$ とすれば，

$$M(m, n, \delta, \gamma) \geq \gamma/\delta$$

が成り立つ．したがって，$M(m, n, \delta, \gamma)$ の上界として γ/δ より小さな値を得ることはできない．

謝辞：本研究の一部は，JSPS 科学研究費の若手研究 (B) 23710164 と基盤研究 (A)20241038 の補助を受け行われた．

参考文献

[1] R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, and J. B. Orlin: *Network Flows: Theory, Algorithms and Applications*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.

[2] G. B. Dantzig, *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1963).

[3] G. B. Dantzig and M. N. Thapa, *Linear Programming*, Springer-Verlag, New York (1997).

[4] T. Kitahara, T. Matsui, and S. Mizuno, On the Number of Solutions Generated by the Simplex Method for LP with Bounded Variables, Technical paper, available at http://www.me.titech.ac.jp/˜mizu_lab/SimplexMethod/ (2011).

[5] T. Kitahara and S. Mizuno, A Bound for the Number of Different Basic Solutions Generated by the Simplex Method, to appear in *Mathematical Programming.*

[6] T. Kitahara and S. Mizuno, Klee-Minty's LP and Upper Bounds for Dantzig's Simplex Method, *Operations Research Letters* 39 (2011) 88–91.

[7] T. Kitahara and S. Mizuno, On the Number of Solutions Generated by the Dual Simplex Method, Technical paper, available at http://www.me.titech.ac.jp/˜mizu_lab/SimplexMethod/ (2011).

[8] T. Kitahara and S. Mizuno, Lower Bounds for the Maximum Number of Solutions Generated by the Simplex Method, Technical Report, Tokyo Institute of Technology, Department of Industrial Engineering and Management (2011).

[9] V. Klee and G. J. Minty, How good is the simplex method. In O. Shisha, editor, *Inequalities III*, pp. 159–175, Academic Press, New York, NY (1972).

[10] Y. Ye, The Simplex and Policy Iteration Methods are Strongly Polynomial for the Markov Decision Problem with a Fixed Discount Rate, Technical paper, available at http://www.stanford.edu/˜yyye/ (2010).