# 数理工学第二 中間試験問題

平成 24 年 11 月 21 日 水曜日

注意事項

1. それぞれの問題ごとに 1 枚の答案用紙を使用すること.
2. すべての答案用紙に学籍番号, 氏名, 問題番号を記述すること.
3. 解答は結果だけではなく導出過程も含め要領よく記述すること.
4. 以下の問題において, 内積は $(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}$ で定義されているとする.

**問題 I.** (配点目安: 計 30 点)

行列 $A$ とベクトル $\boldsymbol{t}$ について以下の問いに答えよ. ただし, $W$ と $H$ は 0 でない実数とする.

$$A = \begin{pmatrix} W & 9 & 3 & 5 \\ 0 & H & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(1) $W = 1, H = 2$ であるときに, 行列 $A$ の階数を求めよ. (配点目安: 5 点)
(2) $W = 1, H = 2$ であるときに, 行列 $A$ の核 $\ker(A)$ を求めよ. (配点目安: 10 点)
(3) $W = 1, H = 2$ であるときに, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{t}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ を全て求めよ. (配点目安: 10 点)
(4) 行列 $A$ の階数が 2 になるような $W$ と $H$ を求めよ. (配点目安: 5 点)

**問題 II.** (配点目安: 計 25 点)

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} , \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} , \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を, この順にグラム・シュミットの直交化の手順により直交化せよ. (配点目安: 15 点)
(2) 行列 $A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3]$ を QR 分解せよ. (配点目安: 5 点)
(3) $\mathbb{R}^3$ において, ベクトル $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ が張る平面 (原点を含む) と, 点 $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ との最短距離を求めよ. (配点目安: 5 点)

**問題 III.** (配点目安: 計 30 点)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $A$ の固有値と固有空間を求めよ. (配点目安: 15 点)
(2) 行列 $A$ を対角化する直交行列 $Q$ と対角行列 $D$ を求めよ. (配点目安: 10 点)
(3) $\mathbb{R}^3$ において, 部分空間 $(\ker(A))^\perp$ と, 点 $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ との最短距離を求めよ. (配点目安: 5 点)

**問題 IV.** (配点目安: 計 15 点)

(1) 直交行列の行列式は 1 か $-1$ のどちらかであることを示せ. (配点目安: 5 点)
(2) 以下の 4 次正方行列 $Q$ が直交行列であることを示せ. (配点目安: 5 点)

$$Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) 各要素が正の整数からなる 4 次の対称行列で, 対角要素が全て等しく, 行列式が 1024 になるものを 1 つ求めよ.
(配点目安: 5 点)

# 数理工学第二 期末試験問題

平成 25 年 2 月 8 日 金曜日

注意事項

1. すべての答案用紙に学籍番号, 氏名, 問題番号を記述すること.
2. 解答は結果だけではなく導出過程も含め要領よく記述すること.

**問題 I.** (配点目安: 20 点)

以下の関数 $f(x,y)$ の停留点を全て求めて, それらの点が極値になるかどうかを調べよ.
また極値となる点での関数の値を求めよ.

$$f(x,y) = x^3 - x^2 + y^2 - 4xy + 8x\,, \qquad (x,\, y \in \mathbb{R})$$

**問題 II.** (配点目安: 30 点)

$xy$ 平面において以下の問題に答えよ.

(1) $(x,y)$ を $x = \frac{s+t}{2}, y = \frac{s-t}{2}$ で $(s,t)$ に変数変換したときのヤコビアンを求めよ.

(2) $(x,y)$ を $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ で $(r,\theta)$ に変数変換したときのヤコビアンを求めよ.

(3) 以下の積分の値を求めよ.

$$\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|+|y| \leq 1 \leq 2(x^2+y^2)\}$$

**問題 III.** (配点目安: 25 点)

区間 $[-\pi,\pi]$ 上の関数 $f(t)$ を $f(t) = |t|$ と定義する.

(1) $f(t)$ をフーリエ級数展開せよ.

(2) 以下の等式を示せ.

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \dots$$

**問題 IV.** (配点目安: 25 点)

(1) 以下の微分方程式の初期値問題を解け. ($n$:非負整数定数; $\alpha_n$:実数定数)

$$4\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + x(t) = \alpha_n \cos nt, \quad x(0) = 0, \quad x^{(1)}(0) = 0$$

(2) 以下の微分方程式の初期値問題を解け. ($m$, $n$:非負整数定数; $\alpha_m$, $\alpha_n$:実数定数)

$$4\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + x(t) = \alpha_m \cos mt + \alpha_n \cos nt, \quad x(0) = 0, \quad x^{(1)}(0) = 0$$

(3) 以下の微分方程式の初期値問題を解け. ($N$:非負整数定数; $\alpha_0$, ..., $\alpha_N$:実数定数)

$$4\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + x(t) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k \cos kt, \quad x(0) = 0, \quad x^{(1)}(0) = 0$$

必要なら以下の公式を用いてかまわない.

**ラプラス変換表**

| 原関数 $f(t)$ | 像関数 $F(s)=L(f(t))=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\mathrm{d}t$ |
|---|---|
| $1$ | $\frac{1}{s}$ |
| $t^m$ | $\frac{m!}{s^{m+1}}$ |
| $\cos\beta t$ | $\frac{s}{s^2+\beta^2}$ |
| $\sin\beta t$ | $\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$ |

($m$ は非負整数定数, $\beta$ は実数定数)

**ラプラス変換の移動則**　　$f(t)$ のラプラス変換 $L(f(t))$ を $F(s)$ と表すと以下が成立する.

$$L(e^{\alpha t}f(t))=F(s-\alpha),\quad (\alpha \text{ は実数定数})$$

**ラプラス変換の微分則**　　$x(t)$ の $n$ 階導関数のラプラス変換は

$$L\left(\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}(t)\right)=s^nX(s)-s^{n-1}x(0)-s^{n-2}x^{(1)}(0)-\cdots-x^{(n-1)}(0)$$

と表される. ここで, $X(s)$ は $x(t)$ のラプラス変換で, $x^{(n)}(t)$ は $x^{(n)}(t)=\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}(t)$ を表す.

**フーリエ級数展開**

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx,$$
$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

**三角関数の公式**

$$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,,\quad \sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}\,,$$
$$\cos(\theta_1+\theta_2)=\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2\,,$$
$$\cos(\theta_1-\theta_2)=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\,,$$
$$\sin(\theta_1+\theta_2)=\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_2\,,$$
$$\sin(\theta_1-\theta_2)=-\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_2$$

**オイラーの公式**

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta,\quad (i \text{ は虚数単位})$$