

2011年7月12日

数理工学第一 期末試験

- ・試験時間は90分とする.
- ・すべての答案用紙に学籍番号, 氏名, 問題番号を必ず記入すること.
- ・答えは結果のみではなく, 導出過程も要領よく記すこと. ただし, 解答に不要な記述は減点の対象とする.

問題 1

- (1) 自然数全体の集合 $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ と非負整数全体の集合 $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ が対等であることを示せ.
- (2) 开区間の集合 \mathcal{T} があって, \mathcal{T} に属するどの2つの开区間も互いに素であるとする. このとき, \mathcal{T} はたかだか可算な集合であることを示せ.

問題 2

- (1) 半开区間 $A = (0, 1] \subset \mathbb{R}$ が開集合でないことを示せ.
- (2) 任意の集合 M の内部 M^i は開集合であることを示せ.

問題 3

- (1) 関数 $d_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $d_1(x, y) = (x^3 - y^3)^2$ とするとき, d_1 が実数全体の集合 \mathbb{R} 上の距離関数であるかどうかを示せ.
- (2) $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とし, 関数 $d_2 : (X \times Y) \times (X \times Y) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$$

とするとき, d_2 が直積集合 $X \times Y$ 上の距離関数であることを示せ.

問題 4

- (1) 任意のレベル集合が凸集合であるが, 凸関数とならない関数 $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ の具体例を一つあげよ.
- (2) (1) で示した関数 f が凸関数でないことを示せ.
- (3) (1) で示した関数 f の任意のレベル集合が凸集合であることを示せ.