

数理工学第一 期末試験 略解

問題 1

- (1) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_+$, $f(x) = x - 1$ が全単射となる.
- (2) テキスト (宮川・水野・矢島『経営工学の数理 I』) の演習問題 6.4 の解答を参照.

問題 2

- (1) $x = 1$, $\varepsilon > 0$ とすると, $x \in A$ だが開球 $B(x, \varepsilon)$ は A に含まれない.
- (2) テキスト (宮川・水野・矢島『経営工学の数理 I』) の定理 7.2 (ii) を参照.

問題 3

- (1) 距離関数ではない. 例えば, $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$ とすれば, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ が成り立たない.
- (2) (i) $d_X(x_1, x_2) \geq 0$, $d_Y(y_1, y_2) \geq 0$ より $d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \geq 0$.
 (ii) $d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 0$
 $\iff d_X(x_1, x_2) = d_Y(y_1, y_2) = 0$ ($\because d_X(x_1, x_2) \geq 0, d_Y(y_1, y_2) \geq 0$)
 $\iff (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.
 (iii) $d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2) = d_X(x_2, x_1) + d_Y(y_2, y_1) = d_2((x_2, y_2), (x_1, y_1))$.
 (iv) $d_2((x_1, y_1), (x_3, y_3)) = d_X(x_1, x_3) + d_Y(y_1, y_3)$
 $\leq d_X(x_1, x_2) + d_X(x_2, x_3) + d_Y(y_1, y_2) + d_Y(y_2, y_3)$
 $= d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + d_2((x_2, y_2), (x_3, y_3))$.

問題 4

- (1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$.
- (2) 例えば, $\alpha = 0.5$, $x = -2$, $y = 0$ とすると, $f((1 - \alpha)x + \alpha y) \leq (1 - \alpha)f(x) + \alpha f(y)$ が成り立たない.
- (3) $f(x) \leq \beta, f(y) \leq \beta$ とする. このとき, $\max\{x^3, y^3\} \leq \beta$ であり, f が単調非減少関数であることに注意すると, 任意の $\alpha \in [0, 1]$ に対して, $f((1 - \alpha)x + \alpha y) \leq f(\max\{x, y\}) = \max\{x^3, y^3\} \leq \beta$ が成り立つ.