数理工学第二 中間試験問題 (改訂版)

平成 23 年 11 月 25 日 金曜日

注意事項

1. それぞれの問題ごとに 1 枚の答案用紙を使用すること.
2. すべての答案用紙に学籍番号, 氏名, 問題番号を記述すること.
3. 解答は結果だけではなく導出過程も含め要領よく記述すること.
4. 以下の問題において, 内積は $(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}$ で定義されているとする.

問題 I. (配点目安: 各 10 点, 計 30 点)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の階数を求めよ.

(2) 行列 A の核 $\ker(A)$ を求めよ.

(3) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{t}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ を全て求めよ.

問題 II. (配点目安: 各 10 点, 計 20 点)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & 1 \\ -1 & 1 & 1-x^2 & x \\ 0 & 1+x & 2+x^2 & 2+x \\ x & -x & -2x & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad (x > 0)$$

(1) 行列 A を LU 分解せよ.

(2) 行列 A の行列式 $\det(A)$ を求めよ.

問題 III. (配点目安: 各 5 点, 計 20 点)

以下の命題が正しいか正しくないか理由をつけて答えよ.

(1) A を $A^2 = A$ を満たす任意の正方行列とすると, $\det(A)$ の値は 0 または 1 のどちらかになる. (正 or 誤?)

(2) 任意の正方行列 A に対して $\det(-A) = -\det(A)$ が成立する. (正 or 誤?)

(3) V_1, V_2 を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とすると, $V_1 \cap V_2$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である. (正 or 誤?)

(4) V_1, V_2 を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とすると, $V_1 \cup V_2$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である. (正 or 誤?)

問題 IV-A. [選択問題: 問題 IV-A または問題 IV-B のどちらか 1 つを選んで解答せよ.] (配点目安: 計 30 点)

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を, この順にグラム・シュミットの直交化の手順により直交化せよ. (配点目安: 15 点)

(2) 行列 $A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3]$ を QR 分解せよ. (配点目安: 10 点)

(3) $\mathbb{R}^3$ において, ベクトル $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ が張る平面 (原点を含む) と, 点 $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ との最短距離を求めよ. (配点目安: 5 点)

問題 IV-B. [選択問題: 問題 IV-A または問題 IV-B のどちらか 1 つを選んで解答せよ.] (配点目安: 計 30 点)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値と固有空間を求めよ. (配点目安: 15 点)

(2) 行列 A を対角化する直交行列 Q と対角行列 D を求めよ. (配点目安: 10 点)

(3) $\mathbb{R}^3$ において, 部分空間 $(\ker(A))^\perp$ と, 点 $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ との最短距離を求めよ. (配点目安: 5 点)

数理工学第二 期末試験問題

平成 24 年 2 月 10 日 金曜日

注意事項

1. すべての答案用紙に学籍番号, 氏名, 問題番号を記述すること.
2. 解答は結果だけではなく導出過程も含め要領よく記述すること.

問題 I. (配点目安: 25 点)

以下の 2 変数関数 $f(x,y)$ の停留点を求め, その点における関数値を求めよ.
また, 停留点において $f(x,y)$ が極小か極大かまたは極値になっていないかどうかを調べよ.

$$f(x,y) = a(x^2+y^2) + x^2 - y^2, \quad (a \text{ は絶対値が 1 でない実数定数})$$

問題 II. (配点目安: 25 点)

xy 平面において以下の問題に答えよ.

(1) (x,y) を $x = \frac{s+t}{2}, y = \frac{s-t}{2}$ で (s,t) に変数変換したときのヤコビアンを求めよ.

(2) (x,y) を $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ で (r,θ) に変数変換したときのヤコビアンを求めよ.

(3) 以下の積分の値を求めよ.

$$\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1 \le |x|+|y|\}$$

問題 III. (配点目安: 25 点)

区間 $[-\pi,\pi]$ 上の関数 $f(x)$ を $f(x) = e^{\omega|x|}$ と定義する. ω は 0 でない実数定数とする.

(1) $f(x)$ をフーリエ級数展開せよ.

(2) 以下の等式を示せ.

$$\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\left\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}\right\} = 2$$

問題 IV-A. [選択問題: 問題 IV-A または IV-B のどちらか 1 つを選んで解答せよ.] (配点目安: 25 点)

以下の微分方程式の初期値問題を解け.

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 4\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 5x(t) = 0, \quad x(0) = 2, \quad x^{(1)}(0) = 0$$

問題 IV-B. [選択問題: 問題 IV-A または IV-B のどちらか 1 つを選んで解答せよ.] (配点目安: 25 点)

時刻 t において $N(t)$ 個の放射性原子核が存在するとき, 単位時間に崩壊 (減少) する放射性原子核の個数は $N(t)$ に比例することが知られている (比例定数は t に依らない). この状況を微分方程式でモデル化し, その微分方程式を解いて $N(t)$ を時刻 t の関数で表せ. ただし, 時刻 $t=0$ における放射性原子核の個数を N_0 とし, 時刻 $t=T$ において放射性原子核の個数は $N_0/2$ になったとする.

必要なら以下の公式を用いてかまわない.

ラプラス変換表

原関数 $f(t)$	像関数 $F(s) = L(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \mathrm{d}t$
1	$\frac{1}{s}$
t^m	$\frac{m!}{s^{m+1}}$
$\cos \beta t$	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$
$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$

(m は非負整数定数, β は実数定数)

ラプラス変換の移動則　$f(t)$ のラプラス変換 $L(f(t))$ を $F(s)$ と表すと以下が成立する.

$$L(e^{\alpha t} f(t)) = F(s-\alpha), \quad (\alpha \text{ は実数定数})$$

ラプラス変換の微分則　$x(t)$ の n 階導関数のラプラス変換は

$$L\left(\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}(t)\right) = s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x^{(1)}(0) - \cdots - x^{(n-1)}(0)$$

と表される. ここで, $X(s)$ は $x(t)$ のラプラス変換で, $x^{(n)}(t)$ は $x^{(n)}(t) = \frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}(t)$ を表す.

フーリエ級数展開

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \\ a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \mathrm{d}x, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, \mathrm{d}x, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

三角関数の公式

$$\begin{aligned} &\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}, \quad \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}, \\ &\cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2, \\ &\cos(\theta_1-\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2, \\ &\sin(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2, \\ &\sin(\theta_1-\theta_2) = -\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2 \end{aligned}$$

オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad (i \text{ は虚数単位})$$