# オペレーションズ・リサーチ 期末試験略解　2012年2月7日実施

**問題 1**

1. 二部グラフ

2. 工場 $i \in \{1, 2\}$ から倉庫 $j \in \{1, 2, 3\}$ への輸送量を $x_{ij}$ とすると，最小コストの輸送計画を求める問題は次のように定式化される．

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & z = 6x_{11} + 6x_{12} + 5x_{13} + 3x_{21} + 7x_{22} + 3x_{23}, \\
\text{制約条件} & x_{11} + x_{12} + x_{13} = 80, \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} = 100, \\
& x_{11} + x_{21} = 60, \\
& x_{12} + x_{22} = 90, \\
& x_{13} + x_{23} = 30 \\
& x_{ij} \geq 0 \ (i \in \{1, 2\},\ j \in \{1, 2, 3\}).
\end{array}
$$

3. 工場 1 の供給量は 80 で倉庫 1 の需要は 60 なので $x_{11} = 60$ とする．工場 1 の残りの供給量は $80 - 60 = 20$ となる．倉庫 2 の需要量は 90 なので，$x_{12} = 20$ とする．工場 1 の残りの供給量は 0 となり，倉庫 2 の残りの需要量は $90 - 20 = 70$ となる．工場 2 の供給量が 100 あるので $x_{22} = 70$ とする．これで倉庫 2 の需要は満たされた．工場 2 の残りの供給量は $100 - 70 = 30$，倉庫 3 の需要量は 30 だから $x_{23} = 30$ とする．以上によりすべての需要と供給が満たされ，実行可能基底解 $(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}) = (60, 20, 0, 0, 70, 30)$ が得られる．目的関数値を計算すると 1060 となる (図を書きながら計算するとわかりやすい).

4. 全域木

5. 等式制約の一つは冗長なので，それを削除して 3 で求めた実行可能基底解に対応する辞書を書くと次のようになる．

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & z = 1060 + 3x_{13} - 4x_{21}, \\
\text{制約条件} & x_{11} = 60 - x_{21}, \\
& x_{12} = 20 - x_{13} + x_{21}, \\
& x_{22} = 70 + x_{13} - x_{21}, \\
& x_{23} = 30 - x_{13}, \\
& x_{ij} \geq 0 \ (i \in \{1, 2\},\ j \in \{1, 2, 3\}).
\end{array}
$$

$x_{21}$ を値を増やす変数とすると，$x_{11}$ が最初に 0 になるので $x_{21}$ と $x_{11}$ を交換する．新しい辞書は

次のようになる．

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & z = 820 + 4x_{11} + 3x_{13}, \\
\text{制約条件} & x_{12} = 80 - x_{11} - x_{13}, \\
 & x_{21} = 60 - x_{11}, \\
 & x_{22} = 10 + x_{11} + x_{13}, \\
 & x_{23} = 30 - x_{13}, \\
 & x_{ij} \geq 0 \ (i \in \{1,2\},\ j \in \{1,2,3\}).
\end{array}
$$

目的関数における非基底変数の係数がすべて正になったので，これは最適な辞書である．最適解は $(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}) = (0, 80, 0, 60, 10, 30)$，最適値は 820 となる．

## 問題 2

1. $x_4 = 0$ とおいた子問題 $P_1$ は次のようになる

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & 28x_1 + 16x_3 + 23x_5 + 12x_6 + 3x_2, \\
\text{制約条件} & 3x_1 + 3x_3 + 5x_5 + 6x_6 + 2x_2 \leq 9, \\
 & x_i \in \{0,1\} \ (i = 1,2,3,5,6).
\end{array}
$$

ただし，目的関数の係数/制約条件の係数が大きい順に並べ替えている．緩和問題の最適解は，比が大きい順に値を決めていけばよい．すると $x_1 = x_3 = 1,\ x_5 = (9-3-3)/5,\ x_6 = x_2 = 0$ となる．まとめると，$P_1$ の緩和問題の解は $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (1, 0, 1, 0, 3/5, 0)$ であり，最適値は 289/5 となる．

次に，$x_4 = 1$ とおいた子問題 $P_2$ は次のようになる．

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & 19 + 28x_1 + 16x_3 + 23x_5 + 12x_6 + 3x_2, \\
\text{制約条件} & 3x_1 + 3x_3 + 5x_5 + 6x_6 + 2x_2 \leq 5, \\
 & x_i \in \{0,1\} \ (i = 1,2,3,5,6).
\end{array}
$$

$P_2$ の緩和問題の解は $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (1, 0, 2/3, 1, 0, 0, 0)$ であり，最適値は 173/3 となる．

2. 次の 3 点を挙げればよい．

- 子問題に実行可能解が存在しない．
- 子問題の緩和問題の解が整数解となり，子問題の最適解が得られた場合．
- 子問題の緩和問題の最適値が暫定的な最適値を下回り，子問題に最適解が含まれないことがわかったとき．

## 問題 3

1. 理想的な一対比較行列 $\bar{A}$ は

$$
\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{w}_1/\bar{w}_2 & \bar{w}_3/\bar{w}_1 \\ \bar{w}_2/\bar{w}_1 & 1 & \bar{w}_2/\bar{w}_3 \\ \bar{w}_3/\bar{w}_1 & \bar{w}_3/\bar{w}_2 & 1 \end{bmatrix}
$$

となる．

2. $\bar{A}$ の各行の要素の幾何平均からなるベクトルを計算すると，$\frac{1}{(\bar{w_1}\bar{w_2}\bar{w_3})^{1/3}}\begin{bmatrix} \bar{w_1} \\ \bar{w_2} \\ \bar{w_3} \end{bmatrix}$ となり，このベクトルは真のウェイトベクトルの定数倍となる．そこで，現実の一対比較行列 $A$ に対しても，各行の要素の幾何平均からなるベクトルを計算し，和が 1 になるように標準化したものをウェイトとして用いる．

**問題 4**

1. 入力のウェイトを $u \in \Re$，出力のウェイトを $v \in \Re$ とすると，$DMU_1$ の D 効率値を計算する数理計画問題は次のようになる．

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 25v/6u \\ \text{制約条件} & 25v/6u \leq 1, \\ & 16v/3u \leq 1, \\ & 7v/2u \leq 1, \\ & 23v/7u \leq 1, \\ & 45v/7u \leq 1, \\ & u, v \geq 0. \end{array}$$

2. $\alpha = v/u$ とおくと，上の問題は次の問題と等価である．

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 25\alpha/6, \\ \text{制約条件} & \alpha \leq 6/25, \\ & \alpha \leq 3/16, \\ & \alpha \leq 2/7, \\ & \alpha \leq 7/23, \\ & \alpha \leq 7/45, \\ & \alpha \geq 0. \end{array}$$

制約条件は $0 \leq \alpha \leq 7/45$ と等価であるから，この問題の最大値，すなわち $DMU_1$ の D 効率値は $25/6 \times 7/45 = 35/54$ となる．